F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,

ÜBER DIE

THEORIE DES KREISELS.

HEFT IV.

DIE TECHNISCHEN ANWENDUNGEN DER KREISELTHEORIE.

FÜR DEN DRUCK BEARBEITET UND ERGÄNZT VON

FRITZ NOETHER.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1910.

VORWORT.

Als F. Klein im Wintersemester 1895/96 eine zweistündige Vorlesung „über den Kreisel“ hielt, unternahm er es in erster Linie, die namentlich in England verbreitete unmittelbarere Auffassung der mechanischen Probleme gegenüber der abstrakteren Färbung der deutschen Schule zu betonen, andererseits die namentlich in Deutschland ausgebildeten Methoden der Riemannschen Funktionentheorie für die Mechanik fruchtbar zu machen. Die Berücksichtigung der Anwendungen und der physikalischen Wirklichkeit wurde damals zwar in einzelnen Beispielen angedeutet und lebhaft gefordert, aber noch nicht in vollem Umfange durchgeführt.

In der aus der Feder von A. Sommerfeld stammenden umfänglichen Drucklegung überwog mehr und mehr das Interesse der Anwendungen, besonders nach dessen Übernahme eines Lehramtes in der technischen Mechanik und später in der Physik. Der auf diese Weise hinzutretende Stoff astronomischen, geophysikalischen und technischen Inhaltes hatte aber gegenüber dem Plane der ursprünglichen Vorlesung mit Notwendigkeit eine Änderung des mathematischen Standpunktes im Gefolge. Während die in den ersten Heften vorbereiteten Näherungsmethoden (Methode der kleinen Schwingungen, Behandlung der pseudoregulären Präcession) und namentlich die anschauliche Formulierung der mechanischen Prinzipien mittels des Impulsbegriffes den Anwendungen äufserst konform waren, erwiesen sich die weitergehenden funktionentheoretischen Methoden, die genaue Darstellung der Bewegung durch elliptische Funktionen etc., weiterhin als entbehrlich. So wurden z. B. die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, bzw. die mit ihnen verwandten Quaternionengröfsen, deren geometrische Bedeutung im ersten, deren analytische Wichtigkeit im zweiten Hefte mit besonderem Nachdruck herausgearbeitet war, in dem dritten und vierten Hefte fallen gelassen, natürlich in voller Übereinstimmung mit Klein selbst, dessen Interessen sich ebenfalls mehr und mehr den Anwendungen zugewandt hatten. Insbesondere kommt das vierte Heft bei der Darstellung der technischen Kreiselprobleme mit dem allereinfachsten und elementarsten Gesetz der Kreiselwirkung aus, welches unmittelbar aus der Impulsauffassung der Dynamik starrer Körper fliefst und zu Beginn dieses Heftes noch einmal kurz abgeleitet wird.

Wir wollen nicht leugnen, dafs unserer Arbeit auf diese Weise im Lauf der fünfzehn Jahre, die zwischen dem ersten Plan und dem nunmehrigen Abschlufs des Buches verflossen sind, mit der Einheit der Zeit auch die Einheitlichkeit von Stoff und Darstellungsart verloren

gegangen ist, dafs wir in Bezug auf die allgemeine, sog. analytische Mechanik früher, namentlich in den Anzeigen zu Heft I und II, manches versprochen haben, was später nicht gehalten wird, dafs wir andererseits manchen mathematischen Seitenweg eingeschlagen haben, der uns vorübergehend von unserem Hauptziel ablenkte: dem konkreten Verständnis des dynamischen Problems. Möge die Vielseitigkeit des Inhaltes und die Mannigfaltigkeit der angeschlagenen Interessengebiete als Ersatz angesehen werden für die mangelnde Systematik und Zielsicherheit der Darstellung.

Wenn wir von neuem den gesamten Stoff zu disponieren hätten, so würden wir wahrscheinlich die eigentliche Mechanik des Kreisels einschliefslich ihrer Anwendungen auf einem viel kleineren Raum darstellen, unter Beschneidung der analytischen Seitenschöfslinge, welche sich so gern von dem Stamm der Mechanik abzweigen. Mit dieser Darstellung würden wir uns an das grofse Publikum aller naturwissenschaftlichen oder technischen Interessenten der Kreiseltheorie wenden. Die analytischen Spezialausführungen, die wir schon wegen ihrer besonderen Schönheit gewifs nicht unterdrückt wissen möchten, würden wir in einer anderen Darstellung nur dem engeren mathematischen Kreise vorlegen. Was endlich die Bedürfnisse des ganz unmathematischen Lesers, also die schwierige Frage nach der populären Erklärung des Kreiselphänomens betrifft, so haben wir hierzu im zweiten Heft eine eingehend begründete kritische Stellung genommen und zu Anfang des vierten Heftes nochmals den zwar etwas langen, aber, wie uns scheint, allein gangbaren Weg gekennzeichnet, der von den allgemeinen Impulssätzen der Dynamik des starren Körpers ausgeht. Die Impulssätze wird man entweder systematisch aus der Punktmechanik heraus entwickeln oder gegebenenfalls nur durch Experimente erläutern, um sie weiterhin axiomatisch zu postulieren; auf Grund dieser Sätze lassen sich dann alle die zum Teil paradoxen Thatsachen der Kreiseltheorie als wohl definierte Näherungsaussagen qualitativ verstehen und in ihrem Gültigkeitsbereiche ohne Unklarheit umgrenzen.

Der Kreisel ist vor allen anderen mechanischen Vorrichtungen geeignet, den Sinn für wirkliche Mechanik zu wecken. Möge er in der Darstellung unseres Buches diesem Zweck in erhöhtem Mafse dienen und sich dadurch auch in Zukunft des ehrenvollen Beinamens würdig erweisen, den ihm schon Sir John Herschel beilegte, des Namens eines philosophical instrument!

Göttingen und München, im April 1910.

F. KLEIN. A. SOMMERFELD.

Kapitel IX.

Technische Anwendungen.

§ 1. Die wichtigste Formel der Kreiseltheorie. Allgemeines über die Stabilierung durch Kreiselwirkungen.

Dafs diefses Schlufsheft unseres Werkes so spät erscheint, können wir im Interesse der Sache nicht bedauern. Sind doch die technischen Anwendungen, um die es sich hier hauptsächlich handelt, erst in den letzten zehn Jahren, also während des Drucks dieses Buches, entstanden; wir erinnern an die Schnellbahnen, an den Schiffskreisel und den Kreiselkompafs.

Bei ihrer Erklärung bewährt sich nun in besonderem Mafse das unserer ganzen Darstellung früher zu Grunde gelegte mechanische Prinzip: die Voranstellung des Impulsbegriffes. Wir gelangen von hier aus unmittelbar zu derjenigen Formel, auf der die Theorie fast aller technischen Anwendungen beruht.

Da wir wünschen, dafs die Entwickelungen dieses Kapitels auch ohne eingehendes Studium der vorangehenden Kapitel verständlich sind und sich womöglich auch in den Händen des Ingenieurs als fruchtbar erweisen möchten, scheint es angemessen, die zu ihrer Begründung dienenden Formeln und Begriffe hier in Kürze zusammenzustellen.

Der Impuls (genauer gesagt „das Impulsmoment") war das Moment der Bewegungsgröfse der einzelnen Massenteile des rotierenden starren Körpers, bezogen auf den festen Punkt desselben. Haben wir es mit einem schnell rotierenden Schwungring oder Radsatze zu thun, so überwiegt die Rotation um die Symmetrieaxe („Figurenaxe") so sehr über die dem Körper („Kreisel") sonst etwa erteilten Drehungen, dafs die Ebene jenes Momentes merklich senkrecht zur Figurenaxe steht, merklich in die „Äquatorebene des Kreisels" fällt. Der Impulsvektor, welcher senkrecht auf jener Ebene errichtet wird, fällt dann merklich in die Figurenaxe. Seine nach dieser Axe genommene Komponente, gegen die also die anderen Komponenten meist vernach-

lässigt werden können, nennen wir den „Eigenimpuls“ N. Es ist dasjenige Antriebsmoment („Drall“), das wir beim Anlassen des Kreisels durch eine Schnur auf ihn übertragen, das beim Schiffskreisel durch den Turbinenantrieb oder bei den Eisenbahnrädern durch die Zugkraft der Lokomotive unterhalten wird.

Der früheren Bevorzugung des Uhrzeigersinnes und des Links-Schrauben-Koordinatensystems (vgl. z. B. Fig. 3 auf pag. 18) entspricht es, daſs wir den Impulsvektor nach derjenigen Seite ziehen, von der aus die Rotation um die Figurenaxe, die „Eigenrotation“, im Uhrzeigersinne dreht.

Die Einführung des Impulses liefert nun die Möglichkeit, die Grundgesetze der Dynamik des Kreisels ebenso einfach und fast mit denselben Worten zu formulieren wie die Dynamik des einzelnen Massenpunktes: *Der kräftefreie Kreisel bewegt sich so, daſs sein Impuls nach Richtung und Gröſse im Raum konstant bleibt* (entsprechend dem Galileischen Trägheitsgesetz des einzelnen Massenpunktes). Und: *Unter dem Einfluſs äuſserer Kräfte bewegt sich der Kreisel derart, daſs die Änderungsgeschwindigkeit des Impulsvektors nach Richtung und Gröſse gleich ist dem* (ebenfalls durch einen Vektor dargestellten) *Moment der äuſseren Kräfte in bezug auf den Stützpunkt des Kreisels.* (Newtonsches Beschleunigungsgesetz*) für den Massenpunkt.)

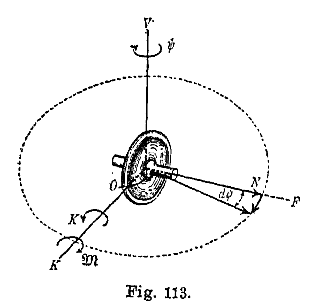


Fig. 113.

I. Die wichtigste Formel der Kreiseltheorie. Wir betrachten einen Schwungring, der mit dem Eigenimpuls N (gleich Trägheitsmoment um die Figurenaxe mal Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe) begabt ist, und denken seine Figurenaxe etwa in horizontaler Lage (Fig. 113). Wir drehen diese Axe um die Vertikale durch O, ohne die Gröſse des Eigenimpulses zu beeinfluſsen (Drehwinkel ψ, Drehgeschwindigkeit $d\psi/dt$). Welches Moment ist hierzu erforderlich?

Die Antwort liefert unser Impulssatz: In der Zeit dt beschreibt der Endpunkt des Vektors N den Weg $N d\psi$ in der Horizontalebene senkrecht zur Figurenaxe. Seine Geschwindigkeit ist also

$$N \frac{d\psi}{dt}.$$

*) Diese Bezeichnung ist eigentlich nicht historisch treu. Newton spricht in seiner Lex secunda nicht von der Beschleunigung, sondern von der Änderung der „quantitas motus“, d. h. der Impulsänderung, wie überhaupt der Impulsbegriff auch in den Newtonschen Prinzipien voran steht.

Dies ist zugleich das äufsere Moment $\mathfrak{M}$, welches wir aufzuwenden haben, um diese Impulsänderung zu veranlassen. Es wirkt um die zur Figurenaxe OF und Vertikalen OV senkrechte Axe OK, die wir wie früher die „Knotenlinie" nennen. Der Sinn des Momentes ist aus der Figur ersichtlich: Stellen wir $\mathfrak{M}$ durch einen Vektor dar, so ist dieser der Impulsgeschwindigkeit gleichgerichtet, weist also in der Figur nach vorn. Dem entspricht ein Drehpfeil, welcher die Halbaxe OK im Uhrzeigersinne umgiebt.

Diesem Momente $\mathfrak{M}$ entgegengesetzt ist die *Kreiselwirkung*, d. h. diejenige Trägheitswirkung des rotierenden Schwungringes, die wir fortgesetzt zu überwinden haben, wenn wir ihn in der geschilderten Weise bewegen. Wir nennen sie K und haben

$$\text{(I)} \qquad K = N\frac{d\psi}{dt}.$$

Der Sinn der Kreiselwirkung ist demjenigen von $\mathfrak{M}$, somit dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt.

Die Kreiselwirkung besteht also darin, dafs sich die Axe des Schwungringes aufzurichten und mit der Axe der hinzukommenden Drehung in gleichsinnigen Parallelismus zu setzen strebt, derart, dafs der Drehsinn der Eigenrotation mit demjenigen der hinzukommenden Drehung übereinstimmen würde. Die Gröfse dieses Bestrebens wird durch (I) *gemessen und durch das äufsere Moment* $\mathfrak{M}$ *im Gleichgewicht gehalten.*

Zu erwähnen ist noch, dafs zwar nicht zur Unterhaltung, aber zur Einleitung der Drehung um die Vertikale ein Impuls um diese Axe von der Gröfse $A d\psi/dt$ erforderlich ist (A = Trägheitsmoment des Kreisels um eine äquatoriale Axe). Der Gesamtimpuls des Kreisels besteht daher aus der Resultante des horizontalen Eigenimpulses N und dieser vertikalen Komponente. Indem wir die letztere vernachlässigten und bei der Anwendung unseres Impulssatzes den Gesamtimpuls mit dem Eigenimpuls identifizierten, begingen wir eine Ungenauigkeit und setzten stillschweigend voraus, daß die Drehgeschwindigkeit $d\psi/dt$ klein sei gegen die Eigenrotation. Dementsprechend enthält auch unsere Formel (I) eine Ungenauigkeit (vgl. hiermit die strenge Formel (III)), die sie aber gerade für die Anwendung auf die praktischen Fälle besonders geeignet macht.

II. Verallgemeinerung dieser Formel. Wir denken uns wieder den Kreisel um die Vertikale gedreht, wobei aber die Figurenaxe nicht die Horizontalebene bestreichen, sondern unter dem beliebigen Winkel ϑ gegen die Vertikale geneigt sein soll. Der Eigenimpuls N beschreibt bei unveränderter Länge einen Kreiskegel und sein Endpunkt einen

Kreis vom Radius $N \sin \vartheta$ (vgl. Fig. 114). Während der Zeit dt ist also der Weg des Impuls-Endpunktes $N \sin \vartheta d\psi$ und seine Geschwindigkeit $N \sin \vartheta d\psi/dt$ parallel der Knotenlinie. Dementsprechend bestimmt sich Größe und Axe des äufseren Momentes $\mathfrak{M}$, welches zur Unterhaltung der Bewegung anzubringen ist, sowie Gröfse und Axe der *Kreiselwirkung*

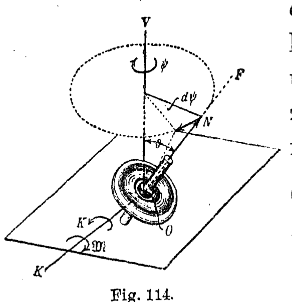


Fig. 114.

$$\text{(II)} \qquad K = N \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt},$$

mit welcher der Kreisel sich der Drehung um die Vertikale widersetzt. Der Sinn der Kreiselwirkung wird auch jetzt (vgl. Fig. 114) durch die Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus beschrieben. Auch diese Formel gilt nur mit Näherung und setzt voraus, dafs die Eigenrotation grofs sei gegen die hinzukommende Drehung.

III. Der strenge Ausdruck für die Trägheitswirkung des Kreisels. Obwohl von geringerer Wichtigkeit, möge auch der allgemeine und in Strenge gültige Wert der Trägheitswirkung abgeleitet werden, die sich aus der bisher betrachteten Kreiselwirkung und einer hinzukommenden Centrifugalwirkung zusammensetzen wird, unter folgenden Voraussetzungen: Die Figurenaxe ist um den Winkel ϑ gegen die Vertikale geneigt; um letztere findet eine gleichmäfsige Drehung $d\psi/dt$ statt; der Impuls wandert dabei ohne Änderung seiner Größe auf einem Kreiskegel um die Vertikale.

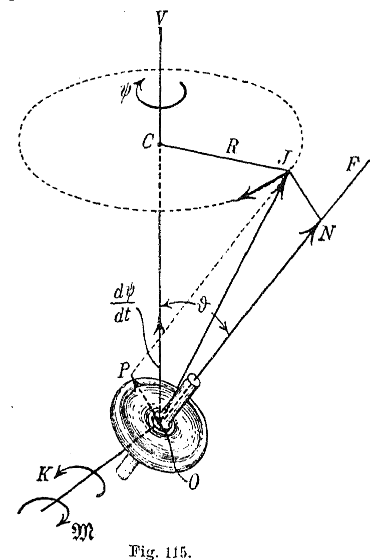


Fig. 115.

Das Bahnelement des Impuls-Endpunktes I (vgl. Fig. 115) ist $R d\psi$, wo $R = CI$ der Radius des von I beschriebenen Kreises ist. Hieraus bestimmt sich das aufzuwendende Moment $\mathfrak{M}$ und die ihm entgegengesetzte Trägheitswirkung K wie oben. Es kommt also lediglich auf die Berechnung des Radius R an.

Die Winkelgeschwindigkeit $d\psi/dt$ tragen wir als Drehpfeil in der Vertikalen auf und zerlegen denselben, da die Vertikale keine Hauptaxe für die Massenverteilung des Schwungringes ist, in zwei Komponenten nach der Äquatorebene und der Figurenaxe:

$$\sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} \quad \text{und} \quad \cos \vartheta \frac{d\psi}{dt}.$$

Die zugehörigen Anteile des Impulses werden durch Multiplikation mit den bez. Trägheitsmomenten gewonnen. Wird also das Trägheitsmoment für eine Axe der Äquatorebene mit A bezeichnet, so erhält man die zur Figurenaxe senkrechte Impulskomponente, welche bei der vorangehenden angenäherten Betrachtung gegen den Eigenimpuls vernachlässigt wurde, gleich

$$OP = A \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt}.$$

Macht man in der Figur $OP = NI$, fügt also diese zur Figurenaxe senkrechte Komponente zu dem Eigenimpuls $N = ON$ hinzu, so erhält man den Endpunkt des Impulsvektors I. Der fragliche Radius R ergiebt sich nun, wenn wir den Linienzug ONI auf die Richtung MI projizieren, zu

$$R = ON \sin\vartheta - NI \cos\vartheta = N \sin\vartheta - A \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt}.$$

Somit ist auch die gesuchte Trägheitswirkung bekannt:

$$\text{(III)} \qquad K = R\frac{d\psi}{dt} = \left(N - A\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}.$$

Das hier gefundene Zusatzglied

$$-A\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

ist übrigens aus der Theorie des einfachen sphärischen Pendels bekannt, es ist die dort als Moment der Centrifugalkraft bezeichnete Wirkung. Verschwindet nämlich der Eigenimpuls des Kreisels ($N = 0$), so schwingt der Kreisel wie ein sphärisches Pendel mit dem Trägheitsmoment A. Wir können uns dieses realisiert denken durch ein Fadenpendel von der Länge l und Masse m, so dafs

$$ml^2 = A.$$

Hier ist nun die horizontal wirkende Centrifugalkraft

$$Z = ml\sin\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

und deren Moment um die Knotenlinie

$$ml\sin\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 l\cos\vartheta = A\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

also gerade der obige Ausdruck. Auch das negative Vorzeichen unseres Zusatzgliedes stimmt mit dieser Betrachtung überein, indem das Moment der Centrifugalkraft das Pendel von der Vertikalen zu entfernen strebt, also den umgekehrten Sinn hat, wie das erste Glied in (III) und wie der Pfeil K in Fig. 115.

Es ist aber zu bemerken, dafs die Scheidung der Trägheitswirkung (III) in Kreiselwirkung und Centrifugalwirkung keine absolute ist, sondern davon abhängt, dafs wir die Figurenaxe bei der Berechnung des Impulses ausgezeichnet haben.

IV. Stabilierung durch Kreiselwirkungen. Eine der auffallendsten und bekanntesten Folgerungen der Kreiseltheorie ist die Möglichkeit, durch Anbringung rotierender Schwungmassen einen an sich instabilen oder neutralen Freiheitsgrad zu stabilisieren. Das Schema dieses Verfahrens, für welches uns die Erörterungen dieses Kapitels mehrfache Beispiele liefern werden, läfst sich auf Grund unserer Formel (I) an einem Beispiel folgendermafsen darstellen.

Die Lage der Figurenaxe in der Horizontalebene (vgl. Fig. 116), welche durch den Winkel ψ gemessen wird, ist an sich, d. h. bei nicht rotierendem Schwungringe, indifferent: Ein Drehmoment Ψ um die Vertikale bewirkt einen Ausschlag ψ, der sich mittels des für die Vertikale in Betracht kommenden äquatorialen Trägheitsmomentes A aus der Beschleunigungsgleichung bestimmt

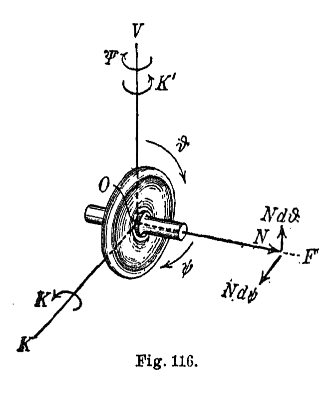


Fig. 116.

(IV a) $$A\frac{d^2\psi}{dt^2} = \Psi.$$

Ist aber der Schwungring in Rotation versetzt, so ist mit diesem Ausschlag eine Kreiselwirkung K verbunden, welche durch (I) bestimmt ist. *Wir setzen voraus, dafs die Figurenaxe nicht mehr*, wie wir in I. annahmen, *in der Horizontalebene festgehalten wird, sondern sorgen durch eine geeignete Aufhängung dafür, dafs sie ihrer Tendenz zum Parallelismus mit der vertikalen Drehaxe folgen kann.* Sie wird dann ihre Neigung ϑ gegen die Vertikale vermindern, entsprechend der Beschleunigungsgleichung:

(IV b) $$A\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -K = -N\frac{d\psi}{dt}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Winkelgeschwindigkeit der Hebung der Figurenaxe

(IV c) $$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{N}{A}\psi,$$

vorausgesetzt, dafs wir das Azimuth ψ von einer Lage aus zählen, in der $d\vartheta/dt$ gleich Null war.

Nun würde aber die Fortsetzung der Drehung $d\vartheta/dt$ um OK eine Verlagerung des Impulses N, und zwar nach oben erfordern, gerade so gut wie die Drehung $d\psi/dt$ um OV eine Verlagerung in der Horizontalebene. Es tritt daher abermals eine Kreiselwirkung auf, und zwar um die zu OK und OF senkrechte Axe OV. Wir nennen dieselbe K' und bestimmen sie wieder durch die Formel (I) zu

(IV d) $$K' = N\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Entsprechend der Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus wirkt sie im umgekehrten Sinne wie die ursprüngliche Drehung $\frac{d\psi}{dt}$, also in Fig. 116 entgegen dem Uhrzeigersinne. Zu dem Drehmoment Ψ gesellt sich also das Gegenmoment K'.

Die Bewegungsgleichung (IVa) geht daher über in

$$\text{(IVe)} \qquad A\frac{d^2\psi}{dt^2} = \Psi + K' = \Psi + N\frac{d\vartheta}{dt}\cdot$$

In den Gleichungen (IVe) und (IVb) ist nun das Schema der Stabilierung durch Kreiselwirkungen gegeben. Die Gleichung (IVe) geht nämlich bei Benutzung der Gleichung (IVc) über in:

$$\text{(IV)} \qquad A\cdot\frac{d^2\psi}{dt^2} = \Psi - \frac{N^2}{A}\psi.$$

Diese Gleichung (IV) drückt die Möglichkeit einer stabilen Schwingung in der Koordinate ψ aus.

Ist nämlich der Eigenimpuls N hinreichend grofs, so wird das Gegenmoment K' das ursprünglich ablenkende Moment Ψ derart überwiegen, dafs wir bei qualitativen Fragen Ψ gegen K' vernachlässigen können. Dann ist die rechte Seite von (IV) negativ bei positivem ψ, positiv bei negativem.

Die Schwungringsaxe strebt also, gerade so wie ein stabil aufgehängtes Pendel in ihre Anfangslage zurück, eilt über dieselbe hinaus, um sich ihr abermals zu nähern usf. Sie besitzt „eine spezifische Widerstandsfähigkeit gegen Richtungsänderungen, eine Art absoluter Orientierung im Raum“, wie es zum Schlufs des Kap. III hiefs.

Aus unserer Ableitung dieser Stabilierungs-Möglichkeit ergiebt sich aber eine weitere Bedingung von prinzipieller Bedeutung, an welche sie gebunden ist. Die Kreiselaxe mufs die Möglichkeit haben, in vertikaler Richtung auszuweichen; es mufs die Drehung $d\vartheta/dt$ durch die Anordnung des Schwungringes wirklich ermöglicht werden. Bleibt die Kreiselaxe auf die Horizontalebene beschränkt, so wird mit $d\vartheta/dt$ auch unser stabilisierendes Gegenmoment K' gleich Null, und es tritt nur die Kreiselwirkung K auf, welche sich als Druck gegen die die Bewegungsfreiheit des Kreisels beschränkende Führung äufsert. Der Kreisel mufs also seine volle Bewegungsfreiheit haben (zwei Freiheitsgrade für die Bewegung der Figurenaxe in horizontalem und vertikalem Sinn, ein dritter Freiheitsgrad für die Drehung um die Figurenaxe), wenn er stabilisierend wirken soll. Wir sprechen daher das folgende Prinzip aus:

Stabilierung ist nur möglich durch einen Kreisel von d r e i Freiheitsgraden. Nimmt man dem Kreisel einen seiner Freiheitsgrade, so fallen

die durch diesen erzeugten Kreiselwirkungen fort, und es ist seine „spezifische Widerstandsfähigkeit gegen Richtungsänderungen“ dahin. Ein Kreisel von zwei Freiheitsgraden folgt daher widerstandslos den auf ihn wirkenden Impulsen. Erschwert man nur eine der Bewegungsfreiheiten, ohne sie gänzlich aufzuheben, so bleibt eine gewisse Widerstandsfähigkeit zurück, die aber kleiner ausfällt wie bei unbeeinträchtigter Bewegungsfreiheit.

Klemmen wir z. B. in Fig. 23 den inneren Ring fest, heben also die Drehungsmöglichkeit um die Axe ST auf, so läfst sich der Stab bei rotierender Schwungmasse verdrehen, wie wenn er keinen Kreisel enthielte. Die an dem Ring wirkenden Reaktionskräfte leisten dann die Umlagerung des Impulsvektors, die die Führung der Figurenaxe auf der vorgeschriebenen Bahn erfordert. Arbeitet andererseits die Axe ST mit erheblicher Reibung in ihren Lagern, so wird das Gegenmoment K' erheblich kleiner, als es der Gl. (IV) entspricht. Dann wird nämlich die disponible Impulsänderung, die durch die rechte Seite der Gl. (IVd) gegeben ist, nur zum kleinen Teil auf Erzeugung der Drehgeschwindigkeit $d\psi/dt$, zum gröfseren Teile auf Überwindung der der Drehung $d\vartheta/dt$ entgegenwirkenden Reibung verwandt.

Die Gleichungen (IV) sind, da sie auf Grund der Formel (I) abgeleitet sind, mit einer Ungenauigkeit behaftet, auf die wir sogleich zurückkommen, und gelten nur für ein Zeitintervall, in dem die Figurenaxe auf der Vertikalen annähernd senkrecht steht. Vorerst möge, unter Benutzung jener ungenauen Gleichungen, eine quantitative Folgerung gezogen werden.

Nehmen wir z. B. das ablenkende Moment Ψ als konstant an, so läfst sich Gl. (IV) ohne weiteres allgemein integrieren und liefert

$$\psi = \frac{A\Psi}{N^2} + a\cos\frac{N}{A}t + b\sin\frac{N}{A}t;$$

machen wir überdies ψ und $\frac{d\psi}{dt}$ gleich Null für $t = 0$, so wird $b = 0$, $a = -A\Psi/N^2$, also

(IVf) $$\psi = \frac{A\Psi}{N^2}\left(1 - \cos\frac{N}{A}t\right).$$

Die Figurenaxe giebt also dem Momente Ψ etwas nach, und zwar im Mittel um den bei grofsem N kleinen Winkel $\psi_m = A\Psi/N^2$; der Ausdrehungswinkel schwankt zwischen seinem anfänglichen Werte 0 und dem maximalen Werte $2\psi_m$ periodisch hin und her.

Gleichzeitig hebt sich aber die Figurenaxe; nach Gl. (IVe) wird nämlich:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\Psi}{N}\left(1 - \cos\frac{N}{A}t\right),$$

also wenn zu Anfang $\vartheta = \pi/2$ war,

(IV g) $$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Psi}{N} t + \frac{A\Psi}{N^2} \sin \frac{N}{A} t.$$

Diese Bewegung ist keine rein periodische, sondern hat einen mit der Zeit fortschreitenden, durch die ersten beiden Terme gegebenen Hauptbestandteil, welcher von kleinen, durch den letzten Term dargestellten Schwankungen überlagert wird. Amplitude und Zeitmaſs dieser Schwankungen stimmen mit denjenigen des Winkels ψ überein.

Bei sehr großem N werden beide Arten von Schwankungen (ähnlich wie die Nutationen bei der pseudoregulären Präcession (in Kap. V, § 2) unmerklich klein, und wird auch die Hebung der Kreiselaxe sehr langsam erfolgen. Nur in diesem Falle sind die Voraussetzungen unserer Rechnung bei der Anwendung der Formel (I) für eine nicht zu lange Beobachtungszeit t hinreichend genau erfüllt.

Wollen wir dagegen strenge verfahren und die Hebung der Figurenaxe, wie sie in unserem letzten Beispiel zu Tage trat, berücksichtigen, so haben wir die Kreiselwirkung K nicht aus der Gl. (I), sondern aus (III) zu bestimmen; ferner haben wir von der Kreiselwirkung K', welche die zu OF und OK gemeinsame Senkrechte zur Axe hat, nur diejenige Komponente zu nehmen, die um OV wirkt. Sodann aber bleibt auch der Eigenimpuls N nicht konstant, sondern wird, sobald die Figurenaxe nicht mehr senkrecht zur Vertikalen steht, durch das um die Vertikale wirkende Drehmoment Ψ seinerseits abgeändert. Endlich ist die Vertikale keine Hauptaxe der Massenverteilung mehr, sobald die Äquatorebene des Kreisels nicht mehr durch die Vertikale geht; deshalb ist auch die Beschleunigungswirkung des Drehmomentes Ψ nicht mehr, wie in Gl. (IVa), durch $A d^2\psi/dt^2$ gegeben, sondern muſs nach dem allgemeinen Impulssatz und dem allgemeinen Zusammenhange zwischen Impuls- und Drehungsvektor bestimmt werden.

Die so sich ergebenden genauen Bewegungsgleichungen lassen sich zwar nach dem Schema der Lagrangeschen Gleichungen hinschreiben, sind aber einer weiteren Integration nicht zugänglich. Trotzdem kann über den Charakter der Erscheinungen allgemein kein Zweifel sein:

Indem sich der Winkel ϑ von $\pi/2$ bis 0 verkleinert, nimmt die Kreiselwirkung K und die in Betracht kommende Komponente von K' successive ab. Dementsprechend vermindert sich die Stabilität des Kreisels gegen das äuſsere Moment Ψ, bis dieselbe für $\vartheta = 0$ vollständig verschwunden ist. In diesem letzteren Grenzfalle, wo der Eigenimpuls N in der Vertikalen liegt, findet ja bei einer Drehung ψ keine Verlagerung von N und daher auch keine Kreiselwirkung mehr statt.

Die Erfahrung an jedem Kreiselmodell bestätigt diese Schlufsfolgerung vollständig:

Bei fortgesetzter Hebung der Figurenaxe eine fortgesetzte Verminderung der Stabilität gegenüber einem um die Vertikale wirkenden Moment Ψ.

Um das Vorstehende mit den Entwickelungen der vorangehenden Hefte in Zusammenhang zu bringen, mögen folgende Rückverweisungen dienen.

Die grundlegenden Impulssätze sind in Kap. II § 5 begründet.

Zu I. Die Formel (I) wurde z. B. bei der populären Kreisellitteratur pag. 311 besprochen und subsumiert sich unter den allgemeineren Begriff des „Deviationswiderstandes bei der regulären Präcession“ Kap. III, § 6. In der That ist die unter I betrachtete Bewegung eine reguläre Präcession um die Vertikale unter dem Neigungswinkel $\vartheta = \pi/2$ und Formel (I) unter dieser Bedingung und innerhalb der oben genannten Genauigkeitsgrenze identisch mit Gl. (1) von pag. 175. Wegen der Regel des gleichsinnigen Parallelismus vgl. Kap. VIII, pag. 731.

Zu III. Der Ausdruck (III) stimmt nicht nur angenähert für grofses N, sondern genau mit der schon herangezogenen Gl. (1) für den Deviationswiderstand von pag. 175 überein, indem $N = C(\mu + \nu \cos\vartheta)$ ist; das negative Vorzeichen jener Gleichung haben wir gegenwärtig unterdrückt, da wir den Sinn der Kreiselwirkung jetzt lieber in einer für alle Fälle gültigen Weise durch die Regel vom gleichsinnigen Parallelismus festgelegt haben. Auch in den Lagrangeschen Gleichungen (pag. 154, Gl. (1)) ist unsere Formel (III) enthalten. Unsere Kreiselwirkung K war ja ihrer Definition nach entgegengesetzt gleich dem äufseren, um die Knotenlinie wirkenden Moment Θ, das zur Unterhaltung der regulären Präcession erforderlich ist. Daher wird die ϑ-Komponente jener Lagrangeschen Gleichungen bei regulärer Präcession ($\vartheta =$ const.):

$$-K = \frac{d[\Theta]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta}.$$

Wegen des Ausdrucks (6) von pag. 156 ist aber für $\vartheta =$ const.:

$$[\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = A\vartheta' = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = A \sin\vartheta \cos\vartheta\, \psi'^2 - C(\varphi' + \cos\vartheta\, \psi') \sin\vartheta\, \psi' = A \cos\vartheta\, \psi' - N \sin\vartheta\, \psi',$$

also:

$$-K = (N - A\cos\vartheta\,\psi') \sin\vartheta\,\psi'$$

in Übereinstimmung mit Gl. (III) (bis auf das dort nicht angeschriebene Vorzeichen).

Im allgemeinen Fall dagegen, wenn die Bewegung keine reguläre Präcession ist, also das äufsere Moment Θ nicht gerade der Kreiselwirkung das Gleichgewicht hält, haben wir:

$$[\Theta] = A\vartheta'; \quad \frac{d[\Theta]}{dt} = A\vartheta'',$$

also lautet die Lagrangesche Gleichung für die ϑ-Komponente:

$$A\vartheta'' = (A\cos\vartheta\,\psi' - N)\sin\vartheta\,\psi' + \Theta,$$

$$\text{d. i.} \quad A\vartheta'' = -K + \Theta$$

übereinstimmend mit Gl. (IV b) (bei der nur das äufsere Moment Θ als verschwindend angenommen war).

Zu IV. Unser jetziger Ausdruck für das Gegenmoment der Kreiselwirkungen in Gl. (IV) stimmt natürlich mit der früheren Gl. (3) von pag. 195 bis auf die Bezeichnungen überein.

Lord Kelvin hat in seinen „Gyrostaten“ solche Vorrichtungen realisiert, bei denen instabile Freiheitsgrade durch Kreiselwirkungen stabiliert werden. Ein einfachstes Beispiel eines Gyrostaten ist in der „Natural Philosophy“ I, Art. 345, 2. Aufl., pag. 397, sowie Enc. d. math. Wiss. Bd. IV, Art. 6 (Stäckel) Nr. 43b, pag. 675 abgebildet. Die obige Theorie der Kreiselstabilierung giebt bei geringer Modifikation (das äufsere Moment wirkt an der ϑ- statt an der ψ-Koordinate und ist also nicht raumfest) auch die Theorie jenes einfachen Gyrostaten; dagegen ist der Gyrostat wesentlich verschieden von unserem Beispiel hinsichtlich der Ausdauer der Stabilierung; vgl. dazu § 10, Nr. 3 dieses Kapitels.

Das oben betonte Prinzip der zwei und drei Freiheitsgrade ist von Lord Kelvin allgemein für eine beliebige Anzahl von Freiheitsgraden ausgesprochen, und zwar bei Gelegenheit der Behandlung seiner Gyrostaten. Es besagt dann, dafs immer *nur eine gerade Anzahl von labilen Freiheitsgraden* durch Trägheitswirkungen cyklischer Bewegungen stabiliert werden kann, die man als verallgemeinerte Kreiselwirkungen durch Systeme umlaufender Schwungräder verwirklicht denken möge; dagegen ist die Zahl der von vornherein stabilen und auch weiterhin stabil bleibenden Freiheitsgrade beliebig. Analytisch zeigen sich diese Wirkungen in dem Auftreten „gyroskopischer Terme“, das sind Glieder in den Bewegungsgleichungen der nicht-cyklischen Koordinaten, die aus den nicht-cyklischen Geschwindigkeiten und den cyklischen Impulsen zusammengesetzt sind. Vgl. Natural Philosophy, Art. 345 VI ff. Einfachste Beispiele dieser Terme sind die im Text mit K und K' bezeichneten Kreiselwirkungen. Wegen der genaueren analytischen Bauart der Terme vgl. den Schlufs von § 4. Eine interessante Anwendung des Kelvinschen Satzes wird bei der Besprechung der Einschienenbahn (§ 10, Nr. 3) seinen Sinn deutlicher machen.

Eine eingehende mathematische Untersuchung des Stabilierungsproblems auf Grund der strengen Lagrangeschen Gleichungen wäre sehr dankenswert. Es handelt sich dabei einfach um die Frage: Wie verhält sich der Kreisel, wenn auf ihn ein (z. B. konstantes) Moment um eine *raumfeste* Axe wirkt? Das Verhalten des Kreisels unter Einwirkung eines Momentes um eine *im Kreisel feste* Axe ist mittels der Eulerschen Gleichungen leicht zu behandeln (vgl. das ähnliche Problem im vorigen Kap. von pag. 728 und 726). Beim klassischen Problem des schweren Kreisels handelt es sich um ein Moment, dessen Drehpfeil weder *raumfest* noch *kreiselfest* ist, vielmehr auf der raumfesten Vertikalen und der kreiselfesten Figurenaxe senkrecht steht. In der Fragestellung — aber leider nicht in der mathematischen Durchführung — ist das in Rede stehende Stabilierungsproblem mindestens ebenso einfach und anziehend wie das klassische Kreiselproblem.

§ 2. Kreiselwirkungen im Eisenbahnbetriebe.

Unter den technischen Anwendungen der Kreiseltheorie sind diejenigen vielleicht die einfachsten, die die Wirkung schnell umlaufender Räder bei Fahrzeugen betreffen.

Wir betrachten einen Eisenbahnzug und fassen eine einzelne Axe desselben ins Auge. M sei diejenige Masse des Wagens (oder der Lokomotive), die unsere Axe zu tragen hat, ihre eigene Masse eingerechnet, Mg also der Axendruck, mit dem der Radsatz auf horizontaler Strecke im ganzen gegen die Schienen geprefst wird. Das

Trägheitsmoment des Radsatzes um seine Mittellinie heifse C; wir verstehen unter r den Radius der Räder, von der Mittellinie bis zur Lauffläche gerechnet („Laufkreishalbmesser“), und setzen

(1) $$C = mr^2;$$

alsdann heifst m bekanntlich die auf den Umfang der Räder reduzierte Masse des Radsatzes. Ist v die Fahrgeschwindigkeit des Zuges, so wird die Winkelgeschwindigkeit der Räder v/r und der Impuls derselben

(2) $$N = C\frac{v}{r} = mrv.$$

Den Radsatz können wir als einen „symmetrischen Kreisel“ bezeichnen; die Mittellinie des Radsatzes entspricht der Figurenaxe des Kreisels. Sobald diese durch irgendwelche Umstände aus ihrer Richtung abgelenkt wird, entstehen Kreiselwirkungen.

a) In erster Linie betrachten wir den Fall, dafs eine Ablenkung durch die Krümmung des Geleises hervorgerufen wird. Von der üblichen Überhöhung der äufseren Schiene in der Kurve sehen wir zunächst der Einfachheit halber ab. R sei der Krümmungsradius des Geleises in der Kurve. Die Drehgeschwindigkeit in der Kurve heiße $d\psi/dt$ und berechnet sich aus R und der Fahrgeschwindigkeit v zu

(3) $$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v}{R}.$$

Der Radsatz führt in der Kurve zu gleicher Zeit zwei Drehungen aus, einmal eine Drehung um seine Mittellinie, seine „Eigendrehung“, andrerseits die „hinzukommende“ Drehung $\frac{d\psi}{dt}$ um eine vertikale Axe durch den augenblicklichen Krümmungsmittelpunkt der durchfahrenen Kurve. Da wir indessen von der Vorwärtsbewegung des Zuges bei der Berechnung der Kreiselwirkungen absehen können und lediglich die Drehungen des Radsatzes um seinen Schwerpunkt zu betrachten brauchen, so ordnen wir der hinzukommenden Drehung als Axe lieber die Vertikale durch den Schwerpunkt des Radsatzes zu.

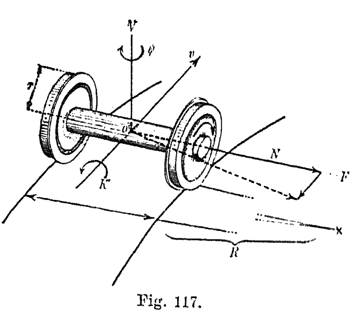


Fig. 117.

In Fig. 117 sind die beiden Axen OV (Axe der hinzukommenden Drehung $\frac{d\psi}{dt}$) und OF (Axe der Eigendrehung = Figurenaxe des Kreisels = Mittellinie des Radsatzes) markiert. Die Fahrtrichtung des Zuges steht zu beiden Axen senkrecht und ist in der Figur von dem Beschauer fortweisend gedacht, so dafs die Eigendrehung um die nach rechts gezeichnete Axe OF im Uhrzeigersinne erfolgt. Der Mittel-

punkt der Kurve möge rechts von der Fahrtrichtung liegen, so dafs die Drehung $\frac{d\psi}{dt}$ von oben gesehen im Uhrzeigersinne stattfindet. In der Figur markieren wir die zu OV und OF senkrechte Axe OK, die „Knotenlinie“, welche mit der Fahrtrichtung abgesehen vom Sinne übereinstimmt. Dies ist zugleich die Axe der Kreiselwirkung, welche nach der Regel vom gleichsinnigen Parallelismus (vgl. den vorigen Paragraphen) den Radsatz um die dem Krümmungsmittelpunkt der Kurve abgekehrte, *äußere* (in der Figur *linke*) Schiene aufzukippen strebt. Diese Kreiselwirkung K stellt uns den Inbegriff der für uns in Betracht kommenden Trägheitswirkungen des rotierenden Radsatzes dar. Ihre Größe bestimmt sich durch die Formel (I) des vorigen Paragraphen zu

$$K = N\frac{d\psi}{dt}$$

oder wegen der Gl. (2) und (3) dieses Paragraphen zu*)

(4) $$K = mv^2\frac{r}{R}.$$

Bezeichnen wir die Spurweite der Schienen mit s und setzen $K = Ps$, so bedeutet P denjenigen Betrag, um welchen die äufsere Schiene durch die Kreiselwirkung belastet, die innere Schiene entlastet wird (vgl. Fig. 118). Das Paar der Kräfte P wird natürlich durch die Schienen aufgenommen, indem der Gegendruck der äufseren Schiene um den Betrag $Q = P$ vergröfsert, der der inneren Schiene um den gleichen Betrag ermäfsigt wird — beides gegenüber demjenigen Gegendruck, der sich als Reaktion gegen das Gewicht des Fahrzeugs ergiebt.

Fig. 118.

Das Kräftepaar Qs der Schienenwirkungen ist nichts anderes als das äufsere Moment $\mathfrak{M}$, von dem im vorigen Paragraphen die Rede war, und dessen Betrag nach unserem allgemeinen Impulssatze gleich der Änderungsgeschwindigkeit des Impulses ist (vgl. Fig. 117, wo diese Änderung angedeutet ist). Während die Kreiselwirkung K eine fingierte oder Trägheitswirkung ist, haben wir dieses Moment $\mathfrak{M}$ der Schienenreaktion als die physikalisch existierende, durch die thatsächliche Führung des Radsatzes in den Schienen realisierte Wirkung anzusehen.

Was die im vorigen Paragraphen hervorgehobene Ungenauigkeit unserer Formel für die Kreiselwirkung betrifft, so überzeugen wir uns leicht, dafs diese bei den Verhältnissen des Eisenbahnbetriebes nicht in Betracht kommt. Sie bestand darin, dafs der Impuls der hinzu-

*) Wir finden diese Formel z. B. in dem anregenden kleinen Buch von Worthington: Dynamics of rotation, an elementary introduction to rigid dynamics, 5. Aufl., London 1904, pag. 157, Example (1).

kommenden Drehung gegen den Eigenimpuls vernachlässigt wurde. Nun verhält sich die hinzukommende Drehgeschwindigkeit v/R zu der Eigenrotation v/r wie der Radradius zum Radius der Kurve; von diesem Verhältnis unterscheidet sich das Verhältnis der zugehörigen Impulskomponenten nur durch den Faktor des Verhältnisses der Trägheitsmomente um die Vertikale und die Figurenaxe. Die Berechtigung zu der fraglichen Vernachlässigung ist also außer Zweifel.

Es entsteht nun die Frage, ob unsere Kreiselwirkung irgendwie praktisch in Betracht kommt. Wir unterrichten uns darüber am besten, wenn wir sie mit dem *Moment der Centrifugalkraft* vergleichen, welche beim Durchfahren der Kurve auftritt und im Eisenbahnbetriebe ihre bekannte wichtige Rolle spielt.

Zunächst sehen wir, daſs die Kreiselwirkung dem Sinne nach mit der Centrifugalwirkung übereinstimmt; denn auch die Centrifugalwirkung ist bestrebt, den Wagen um die äuſsere Schiene der Kurve umzukippen. *Durch die Kreiselwirkung wird also die äuſsere Schiene in einer Kurve noch mehr belastet, die innere noch mehr entlastet, als es durch die Centrifugalkraft allein geschieht.* Namentlich der letztere Umstand ist es, der aus Sicherheitsgründen unerwünscht ist.

Die Gröſse der Centrifugalkraft ist in unseren obigen Bezeichnungen Mv^2/R; sie greift, können wir sagen, im Schwerpunkte des auf unsere Axe entfallenden Zugteiles an und liefert, wenn h die Höhe dieses Schwerpunktes über der Schienenoberkante ist, das Kippmoment

$$H = Mv^2 \frac{h}{R}.$$

Dieses ist also nicht nur in der Richtung, sondern auch in seiner Abhängigkeit von Fahrgeschwindigkeit und Bahnkrümmung mit dem Moment der Kreiselwirkung gleichgebaut.

Mit Rücksicht auf Gl. (4) folgt*):

$$(5) \qquad \frac{K}{H} = \frac{m}{M}\frac{r}{h}.$$

Beide Faktoren der rechten Seite sind echte Brüche. Denn es ist die *Gesamtmasse* des betrachteten Zugteiles gröſser als die *wirkliche* Masse des Radsatzes, und diese ist wieder noch etwas gröſser als die

*) Vgl. hierzu F. Kötter: Die Kreiselwirkung der Räderpaare bei regelmäſsiger Bewegung des Wagens in kreisförmigen Bahnen. Sitzungsber. d. Berliner Mathem. Gesellschaft, III. Jahrgang, 1904, pag. 36, wo auch eine gleichmäſsige Überhöhung der äuſseren Schiene berücksichtigt wird. Das durch unsere Gl. (5) gegebene Verhältnis der Kreiselwirkung zur Centrifugalwirkung deutet Herr Kötter als eine verhältnismäſsige Vergröſserung des Hebelarmes der Centrifugalwirkung, nämlich als eine scheinbare Erhöhung der Schwerpunktslage des Wagens.

reduzierte Masse des Radsatzes (d. h. diejenige Masse, die auf dem Umfange der Räder angebracht, dasselbe Trägheitsmoment um die Mittellinie ergeben würde wie die wirkliche Masse des Radsatzes). Ferner liegt der Schwerpunkt des Radsatzes in der Höhe r über den Schienen, also der Gesamtschwerpunkt des Zugteiles jedenfalls höher als r. Mithin ist sicherlich $K < H$.

Relativ am gröfsten wird die Kreiselwirkung bei den elektrisch angetriebenen Bahnen, falls hier, wie in dem folgenden Beispiel, der Motor direkt an dem Radsatze befestigt ist, wodurch das Trägheitsmoment und die reduzierte Masse des Radsatzes verhältnismäfsig grofs wird. Aufserdem kommt dann der Schwerpunkt der Gesamtmasse verhältnismäfsig tief zu liegen, so dafs die Centrifugalwirkung gering wird. Die folgenden Angaben entsprechen einem von Siemens und Halske erbauten Schnellbahnwagen, der für die Probefahrten der „Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen" auf der Strecke Marienfelde-Zossen, Herbst 1903, benutzt worden ist.*) Die Abmessungen waren: das auf die einzelne Axe entfallende Wagengewicht rund 15 Tonnen**), wirkliches Gewicht eines angetriebenen Radsatzes 4 Tonnen, auf den Umfang reduziertes Gewicht desselben etwa 1,5 Tonnen***), Höhe des Schwerpunktes über Schienenoberkante***) rund 1 m, Radradius 0,625 m.

Wir haben hiernach zu setzen $m/\overline{M} = 1{,}5/15 = 1/10$, $r/h = 0{,}625$, mithin ergiebt sich

$$\frac{K}{H} = 0{,}0625 = \frac{1}{16}.$$

Das Gesamtmoment beim Durchfahren einer Kurve wird daher

$$H + K = H\left(1 + \frac{1}{16}\right) = 1{,}06\,H,$$

ist also unter den vorausgesetzten Umständen um 6 % höher wie das gewöhnlich allein berücksichtigte Moment der Centrifugalkraft. Dieses Gesamtmoment wächst wegen des Ausdruckes von H in bekannter Weise mit der Krümmung und namentlich mit der Fahrgeschwindigkeit, während das Verhältnis beider Anteile K und H von Krümmung und Fahrtgeschwindigkeit unabhängig ist.

---

*) Vgl. Elektrotechn. Zeitschr. 1901, pag. 778 oder Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1904, pag. 949. Der auf der Axe befestigte Motor ist in späteren Ausführungen nicht beibehalten worden; vielmehr sorgt man jetzt für möglichst gute Abfederung desselben.

**) Das Gesamtgewicht des Wagens beträgt 93400 kg; der Wagen hat zwei dreiaxige Drehgestelle mit je zwei äufseren Motoraxen und einer Laufaxe in der Mitte.

***) Nach einer gefälligen Mitteilung der erbauenden Firma.

b) Bekanntlich begegnet man dem schädlichen Momente der Centrifugalkraft dadurch, daſs man die äuſsere Schiene in einer Kurve überhöht und auf diese Weise ein entgegenwirkendes Schweremoment ins Spiel bringt. Wegen der bisher betrachteten Kreiselwirkung wäre diese Überhöhung, wie wir oben sahen, um einige Prozent zu vergröſsern.

Die notwendige Überhöhung hat nun aber noch weitere Folgen. Natürlich muſs die Überhöhung vor und hinter der Kurve — in den sog. Übergangsbögen — stetig eingeleitet und in die nicht überhöhte Strecke zurückgeführt werden. Der Radsatz befindet sich also beim Einlaufen und Auslaufen der Kurve in einem Zustande stetig zunehmender oder abnehmender Schiefstellung seiner Axe. Ersichtlich tritt hierbei abermals eine (von der bisher betrachteten verschiedene) Kreiselwirkung auf, welche nunmehr eine *vertikale* Axe haben wird.

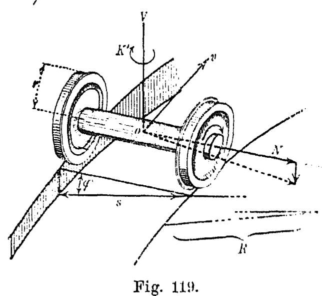


Fig. 119.

Wir knüpfen an Fig. 119 an, denken uns ebenso wie in Fig. 117 das Krümmungscentrum rechts von der Bahn und nehmen daher an, daſs die linke (äuſsere) Schiene überhöht ist. Beim Übergang von der nichtüberhöhten zu der erhöhten Strecke wird der Radsatz um die Axe der Fahrtrichtung im Uhrzeigersinne gedreht; die bezügliche Drehgeschwindigkeit heiſse $\frac{d\varphi}{dt}$. Durch diese wird der Impuls N des Radsatzes nach unten hin abgelenkt; das hierzu erforderliche Drehmoment ist, vom Halbstrahl OV beurteilt, negativ. Das entgegengesetzte Drehmoment stellt den Widerstand des Radsatzes gegen die Impulsablenkung oder kurz seine *Kreiselwirkung* dar; diese wirkt also um OV im Sinne des Uhrzeigers entsprechend der Regel vom homologen Parallelismus. Hierauf bezieht sich der in Fig. 119 angebrachte Pfeil K'. Führt der Übergangsbogen umgekehrt von einer überhöhten krummen zu einer nichtüberhöhten geraden Strecke, so kehrt sich ersichtlich der Sinn von $\frac{d\varphi}{dt}$ und damit auch der Sinn der Kreiselwirkung um.

Auch die Gröſse unserer jetzigen Kreiselwirkung ist wieder durch die Formel (I) des vorigen Paragraphen bestimmt zu

$$K' = N\frac{d\varphi}{dt}. \tag{6}$$

Um sie mit der vorher berechneten Gröſse von K vergleichen zu können, haben wir zunächst die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ zu berechnen. h' sei die Überhöhung der äuſseren Schiene in der Kurve, l die Länge des Übergangsbogens, also h'/l die für den ganzen Über-

gangsbogen als gleichmäfsig vorausgesetzte Neigung des äufseren Schienenstranges gegen die Horizontalebene oder der Anstieg desselben für die Länge 1. Ist s wieder die Spurweite der Bahn, so wird daher die Winkeländerung der Mittellinie des Radsatzes, ebenfalls für die Längeneinheit, h'/ls. Da aber der Zug in der Zeiteinheit v Längeneinheiten zurücklegt, so wird die genannte Winkeländerung pro Zeiteinheit, d. h. die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich

$$\frac{h'v}{ls}.$$

Setzen wir noch für N den Wert aus Gl. (2) ein, so liefert (6)

$$K' = mv^2 \frac{h'}{l} \frac{r}{s}. \tag{7}$$

Dieses Moment K' ist natürlich, ebenso wie K, um so gröfser, je gröfser die Fahrgeschwindigkeit ist, und hängt überdies von dem gröfseren oder geringeren Anstieg der Schiene in dem Übergangsbogen ab. Der Vergleich von Formel (7) und (4) zeigt nun, dafs

$$\frac{K'}{K} = \frac{h'}{l} \frac{R}{s}. \tag{8}$$

Man beachte, dafs bei dem Übergang von einer geraden zu einer kreisförmig gekrümmten Strecke der Krümmungsradius R des Übergangsbogens von dem Anfangswerte ∞ stetig bis auf den Radius der definitiven Kreisbogenstrecke vermindert wird. Da die Kreiselwirkung K mit abnehmendem Krümmungsradius zunimmt, die Kreiselwirkung K' aber vom Krümmungsradius unabhängig ist, so versteht man, dafs zu Beginn des Übergangsbogens (R sehr grofs) K' überwiegen mufs. Wir fragen, ob dies auch am Ende des Übergangsbogens gilt, wo K seinen vollen Wert erreicht hat, der für das weitere Passieren der kreisförmigen Kurve mafsgebend ist.

Wir setzen diejenige schärfste Krümmung voraus, die im Eisenbahnbetriebe noch mit voller Schnellzugsgeschwindigkeit (100 km/Stunde) passiert werden darf, nämlich $R = 900$ m. Die Spurweite beträgt durchgehends $s = 1{,}435$ m. Bei der Tracierung der Bahn wählt man die Länge des Übergangsbogens so, dafs der Anstieg möglichst nicht mehr als 1 : 300 wird, d. h. man wählt l nach Möglichkeit $= 300\, h'$. Hiernach ergiebt Formel (4)

$$\frac{K'}{K} = \frac{900}{430} = 2{,}1.$$

Es zeigt sich also, dafs beim Durchfahren eines Übergangsbogens dauernd die Kreiselwirkung um die Vertikale diejenige um die Fahrtrichtung überwiegt. Ist der kreisförmige Teil der Kurve erreicht, in

welcher kein Wechsel der Überhöhung mehr eintritt, so fällt natürlich die Wirkung K' fort, und bleibt K allein übrig.

In dem Bericht*) der bereits genannten Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen über ihre Versuchsfahrten September — November 1903 finden wir in der That einen Hinweis auf die Wichtigkeit sanft geneigter Übergangsbögen bei höheren Geschwindigkeiten. Auf der Versuchsstrecke hatte die stärkste Kurve 2000 m Krümmungsradius; die Überhöhung der äufseren Schiene von 80 mm war ursprünglich auf eine Strecke von 50 m, d. h. in einem Anstieg von 1:600, ausgeglichen. Indessen erwies sich dieser Anstieg für Geschwindigkeiten gröfser als 160 km/Stunde zu steil: Bei der Einfahrt in die Kurve war die einseitige Hebung des Wagens deutlich als Stofs zu spüren, dessen Drehbestandteil also wohl in der Hauptsache auf Kreiselwirkung zurückzuführen wäre. Als dagegen der Anstieg auf 1:1200 erniedrigt war, verschwanden die beobachteten Stöfse fast ganz.

Es scheint also, dafs im Gegensatz zu der ursprünglich betrachteten Kreiselwirkung K, deren unmittelbare praktische Bedeutung gering ist, die Kreiselwirkung K' unerwünschte Folgen haben kann. Wir wollen daher der Art und Weise, wie letztere zustande kommen, etwas näher nachgehen.

Bekanntlich hat der Radsatz innerhalb der Schienen immer etwas Spielraum (10 bis 20 mm); er kann also der Kreiselwirkung K', die ihn um die Vertikale zu drehen strebt, in beschränkten Grenzen nachgeben, wobei allerdings die sehr starke Reibung zwischen Rad und Schiene entgegenwirkt. Man kann bemerken, dafs die Reibung im Wesentlichen unabhängig von der Geschwindigkeit ist, die Kreiselwirkung aber quadratisch mit ihr anwächst. Bei zunehmender Geschwindigkeit könnte also trotz der grofsen Reibung die Kreiselwirkung K' in einer Verdrehung um die Vertikale sich äufsern. In dem mit dem Radsatze verbundenen Fahrzeug wird dann ebenfalls eine Drehung um die Vertikale oder, wie man im Eisenbahnwesen sagt, ein *Schlingern* hervorgebracht. Wegen der federnden Verbindung zwischen Radsatz und Fahrzeug kann, zumal bei der Lokomotive, eine solche Schlingerbewegung einmal eingeleitet einige Elongationen machen und dadurch ihrerseits auf den Radsatz zurückwirken in einem Mafse, das natürlich wieder durch die Schienenreibung bestimmt wird. Gleichviel durch welche Ursachen hervorgerufen, wird eine Ablenkung des Radsatzes um die Vertikale ebenso wie die ursprünglich betrachtete Ablenkung beim Durchfahren einer Kurve Kreiselwirkungen K hervorrufen, bestehend in einem Mo-

*) Berlin 1904 bei S. Hermann, pag. 44.

ment um die Fahrtrichtung. Die Gröſse des so entstehenden Momentes hängt von der Geschwindigkeit des Schlingerns ab. Die letztere wird aber jetzt erheblich höher werden wie beim Durchfahren einer Kurve, wo sie nur v/R betrug. Es möge hervorgehoben werden, daſs die Drehgeschwindigkeit des Schlingerns gemildert werden kann, wenn man dem Fahrzeug ein möglichst groſses Trägheitsmoment um die Vertikale giebt.

c) Unsere Darstellung brachte es mit sich, daſs als primäre Ursache unseres Momentes K' zunächst die absichtliche Überhöhung einer Schiene in einem Übergangsbogen angesehen wurde. Es liegt aber auf der Hand, daſs unbeabsichtigte Höhenunterschiede der Schienenführung und Unregelmäſsigkeiten am Radumfange in demselben Sinne und eventl. in erhöhtem Maſse wirken werden. Wenn z. B. ein Rad an unserer Axe *unrund* gelaufen ist, so macht die Mittellinie der Axe bei jedem Umlauf eine kleine Senkung und darauffolgende Hebung durch. Bei der hierdurch hervorgerufenen Kreiselwirkung K' kommt es nicht auf die Gröſse der Senkung oder Hebung selbst, sondern auf die Gröſse ihres Abfalles und Anstieges an: diese wird auch bei geringer Abweichung des Rades von der Kreisform verhältnismäſsig groſs sein, da sich Abfall und Anstieg je auf der verhältnismäſsig kurzen Strecke eines Radumfanges wiederholen. Auf diese Weise können starke Momente K' und schnelle Schlingerbewegungen, endlich als Folge derselben bedeutende Momente K und abwechselnd erhebliche Entlastungen der einen oder anderen Schiene eintreten. Ebenso wie Unregelmäſsigkeiten im Radumfange wirken *Unregelmäſsigkeiten in der vertikalen Schienenführung*, sog. Geleisbuckel. In direkter Weise ferner wirken auf Momente K und damit auf Entlastung der einen und Belastung der anderen Schiene *Unregelmäſsigkeiten in der horizontalen Schienenführung*, seitliche Ausbiegungen der Schiene hin. Es ist dabei namentlich zu betonen, daſs die horizontalen und vertikalen Unregelmäſsigkeiten sich gegenseitig bedingen und mit der Zeit verstärken können.

Ein vertikaler Geleisbuckel z. B. bewirkt eine kleine Schlingerbewegung des Radsatzes; diese würde nach dem Passieren des Buckels einen Druck des Radsatzes gegen eine der Schienen zur Folge haben, und zwar (bei gegebener Geschwindigkeit und Massenverteilung des Fahrzeuges) immer gegen dieselbe Stelle der Schiene. Allmählich wird sich daher eine dem vertikalen Geleisbuckel entsprechende horizontale Schienenausbiegung ausbilden. Gehen wir andererseits von einer horizontalen Unregelmäſsigkeit aus, so bewirkt diese eine Mehrbelastung der einen Schiene, nämlich wenn die Krümmung nach auſsen konvex ist, eine Mehr-

belastung der unregelmäfsig gekrümmten Schiene selbst, wenn die Krümmung nach innen konvex ist, eine Mehrbelastung der anderen Schiene. Wenn eine hinreichende Anzahl von Radsätzen und Zügen diese Stelle passiert hat, wird sich die mehrbelastete Schiene allmählich durchgebogen oder ausgeschliffen haben. *Ein vertikaler Geleisbuckel erzeugt also einen horizontalen und ein horizontaler einen vertikalen: die Kreiselwirkung arbeitet daher systematisch auf eine Verschlechterung der Strecke hin.* Gerade das Zusammenwirken von horizontalen und vertikalen Geleisbuckeln und die durch die Schlingerbewegung vermittelte Verkettung der Momente K und K' können für die Sicherheit des Betriebes gefährlich werden; es wäre wohl wert, diese zunächst rein theoretischen Möglichkeiten an Hand der Erfahrung einmal nachzuprüfen.

Als erschwerender Umstand kann ferner eine Art *Resonanzwirkung* mitspielen, in allen denjenigen Fällen, wo die Kreiselwirkungen (z. B. bei unrunden Rädern oder bei durcheinander bedingten Horizontal- und Vertikalbuckeln) rhythmisch aufeinanderfolgen und wo dieser Rhythmus übereinstimmt mit dem Rhythmus der freien Schwingungen des federnd gelagerten Wagens.*)

Wahrscheinlich wird der Leser geneigt sein, diese Schlufsfolgerungen als theoretische Übertreibungen zu empfinden, wenn er sie mit seinen Erfahrungen über die Ruhe und Sicherheit eines gut abgefederten Eisenbahnwagens vergleicht. Hiergegen ist zu bemerken, dafs nach Formel (4) und (6), welche nicht nur für regelmäfsige Kurven und Überhöhungen, sondern entsprechend auch bei Geleisbuckeln gelten, *alle Kreiselwirkungen mit dem Quadrat der Fahrgeschwindigkeit v zunehmen.* Mögen diese Wirkungen daher unter gewöhnlichen Umständen kaum merklich sein, so erreicht man durch gehörige Steigerung der Fahrgeschwindigkeit eine Grenze, wo sie merklich, und bei weiterer Steigerung eine Grenze, wo sie gefährlich werden. Diese Grenzen liegen sogar gar nicht sehr hoch, eben weil eine Verdoppelung der Geschwindigkeit bereits eine Vervierfachung der Kreiselwirkung zur Folge hat. Thatsächlich wird von den Teilnehmern an den in Berlin ausgeführten Probeschnellfahrten bestätigt, dafs bei dem ursprünglichen, für die Probefahrten nicht besonders vorbereiteten Zustand des Geleises schon für 150 km/Stunde Geschwindigkeit das Gefühl der Sicherheit in sein Gegenteil verwandelt wurde. Die im gewöhnlichen Betriebe als zulässig festgesetzten Geschwindigkeiten sind eben so bemessen, dafs bei ihnen die Unregelmäfsigkeiten im Zustande der Geleise und

*) Man könnte daran denken, die Kreiselwirkungen des Radsatzes dadurch zu kompensieren, dafs man auf der gleichen Axe eine Schwungmasse anordnet, die mit entgegengesetzt gleichem Impuls umläuft.

der Räder sowie die Schwingungsbewegungen der Fahrzeuge noch keine schädlichen Folgen haben.

Wir verstehen daher, dafs die „Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen", bevor sie zu den schliefslich erreichten Höchstgeschwindigkeiten von 200 bis 210 km/Stunde überging, zunächst eine Verstärkung des Oberbaues vornahm und sorgsamste Überwachung desselben veranlafste. Insbesondere spricht Herr Wittfeld*) aus, dessen Veröffentlichungen und gefälligen persönlichen Mitteilungen wir die unter c) mitgeteilten Gesichtspunkte verdanken, dafs die Höchstgrenze der Fahrgeschwindigkeit wesentlich durch den Oberbau und die Gleisführung bestimmt wird. Unter den sonstigen Forderungen, die Herr Wittfeld an einen für Schnellfahrten geeigneten elektrischen oder Dampfwagen stellt, heben wir hervor:

Radsätze von möglichst geringem Trägheitsmoment C — zur Verminderung der Kreiselwirkungen K und K';

Fahrzeuge von möglichst grofsem Trägheitsmoment um die vertikale Schweraxe — zur Verminderung der eventuell durch Kreiselwirkungen angeregten Schlingerbewegungen.

Bei der Korrektur hatten wir Gelegenheit, einen Aufsatz von Herrn G. Brecht über „Schwerpunktslage und Kreiselwirkungen bei elektrischen Lokomotiven" im Manuskript einzusehen, welcher demnächst in der Zeitschrift für elektrische Kraftbetriebe und Bahnen erscheint. Die allgemeinen Überlegungen entsprechen durchaus dem Vorstehenden, werden aber durch eingehende Zahlenrechnungen an bestimmten Lokomotivtypen belegt. Aus den Schlufsfolgerungen des Verf., die für gewisse Bautypen auf eine praktische Bedeutungslosigkeit der Kreiselwirkungen hinauslaufen, führen wir an:

„Bei elektrischen Schnellzugslokomotiven sind zweifellos gewisse, dem elektrischen Antrieb teilweise eigentümliche Kreiselwirkungen zu beachten. Bei Lokomotiven mit Zahnradmotoren sind sie am geringsten, schon wegen des verschiedenen Drehsinns der umlaufenden Massen. Bei Axenmotoren sind sie unter sonst gleichen Verhältnissen gröfser. . . ."

„Die in Krümmungen und Überhöhungen auftretenden gleichförmigen Kreiselwirkungen (vgl. oben unter a) und b)) ändern die senkrechten und seitlichen Schienendrücke um höchstens 5—15%. Diese Wirkungen spielen keine Rolle gegenüber anderen Einflüssen, insbesondere gegenüber der Fliehkraft und den unvermeidlichen Stofswirkungen."

„Etwas gröfsere Bedeutung haben bei der neueren Bauart elektrischer Lokomotiven die Wirkungen, die durch die abgefederten umlaufenden Massen hervorgerufen werden. Es liegt die Möglichkeit vor, dafs durch die Kreiselwirkung ein schlingerndes Fahrzeug ins Wanken gerät und umgekehrt (vgl. oben den Schlufs von b)). Diese Erscheinungen können aber nur ausnahmsweise und nur bei Fahr-

*) Vgl. den Vortrag desselben: Über Schnellbahnen und elektrische Zugförderung auf Hauptbahnen. Annalen für Gewerbe und Bauwesen, herausgeg. von Glaser, Bd. 50, Heft 5, 1902, pag. 86.

geschwindigkeiten über 200 km/Std. in solchem Grade auftreten, dafs sie praktisch von Belang sind; die Betriebssicherheit beeinträchtigen sie auch dann noch nicht. Aufserdem wirken beiden Schwingungen erhebliche Reibungswiderstände entgegen, so dafs sie sich gegenseitig schnell zum Verlöschen bringen. . . .“

„Die Verwendung von Axenmotoren hat zur Folge, dafs die einzelnen Radsätze verhältnismäfsig grofse Impulse erhalten. Wenn daher bei einer solchen Lokomotive an einer besonders schlechten Stelle des Gleises (vgl. oben unter e)) die Axen schnell hintereinander kurze Drehstöfse in ihren senkrechten Ebenen erfahren, so können diese sehr wohl kräftige Drehungen der Axen in wagerechtem Sinne zur Folge haben; es liegt dann thatsächlich die Möglichkeit vor, dafs das ganze Lokomotivuntergestell einen energischen Drehstofs erhält, der starkes Schlingern verursacht. . . . Ausgeschlossen ist es jedenfalls nicht, dafs beim Zusammentreffen verschiedener ungünstiger Umstände und bei sehr schlechter Gleislage Axen mit fest eingebauten Motorankern thatsächlich bedenkliche Kreiselwirkungen geben können.“

§ 3. Der Geradlaufapparat der Torpedos. Whitehead- und Howell-Torpedo.

Ein Beispiel für eine wohl durchdachte und praktisch wirksame Kreiselstabilierung bildet der *Geradlaufapparat des Whitehead-Torpedos.* Die eigenartige Widerstandsfähigkeit des Kreisels gegen Richtungsänderungen, seine „absolute Orientierung im Raume“, wie wir am Schlufs von Kap. III sagten, kommt hierbei voll zur Geltung.

Um die Wirksamkeit des Geradlaufapparates darzulegen, wird es nötig sein, etwas auszuholen und die allgemeine Einrichtung eines Torpedos zu skizzieren.

Der Whitehead-Torpedo hat ungefähr die Form einer Zigarre, ist 5 m lang und hat an der dicksten Stelle einen Durchmesser von 45 cm (vgl. Fig. 120). Das Kopfstück enthält die Sprengladung (Schiefsbaumwolle) und den Zünder. An dieses schliefst sich der Windkessel (300 Liter Inhalt) an, welcher das ganze Mittelstück des Torpedos einnimmt; er ist mit Preßluft von 100 Atm. gefüllt und bildet die Quelle aller Arbeitsleistungen, die der Torpedo in seinem Lauf auszuüben hat, betätigt also die Maschine, die die Geschwindigkeit des Torpedos unterhält, und legt die Steuerruder aus. Es folgt die Schwimmkammer, welche den *Tiefenapparat* beherbergt, von dem wir sogleich sprechen werden, dahinter liegt der Maschinenraum. Die Maschine hat drei Zylinder,

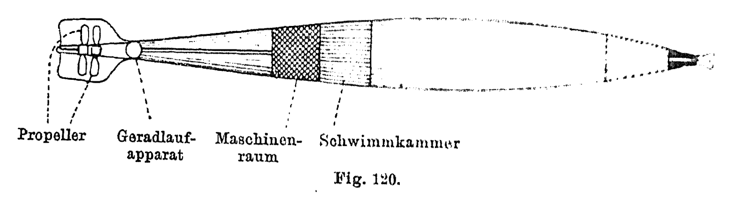


Fig. 120.

ihre Leistung beträgt etwa 60 Pferdestärken; die Prefsluft wird, bevor sie in die Maschine tritt, auf 30 Atm. heruntertransformiert. Zwischen dem Maschinenraum und dem Schwanzstück befindet sich das Tunnelstück, in dem die Wellen von der Maschine nach den beiden Propellern hin verlaufen und an dessen Ende der uns vornehmlich interessierende *Geradlaufapparat* untergebracht ist. Die beiden hintereinander angeordneten Propeller laufen, zur Vermeidung von Drehmomenten, in entgegengesetztem Sinne und machen etwa 1000 Umdrehungen in der Minute. Aufser den Propellern enthält das Schwanzstück in seiner horizontalen Flosse die Ruder für den Tiefenapparat, in seiner vertikalen Flosse die für den Geradlaufapparat.

Die gröfste Entfernung*), auf die ein Torpedo geschossen wird, beträgt 600 m, die Geschwindigkeit des Laufes etwa 15 m/sec. Die Schüsse werden teils unter dem Wasser, teils über Wasser abgegeben. Der Schwerpunkt der Gesamtmasse des Torpedos liegt 1 cm tiefer als der Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse, woraus eine gewisse, wenn auch geringe Stabilität gegen Krängungen folgt.

Wir schildern nun einerseits den Tiefenapparat, andererseits den Geradlaufapparat.

Der *Tiefenapparat* hat den Zweck, den Torpedo auf einer gegebenen, vor dem Schufs einzustellenden Tiefe (3 bis 4 m unter dem Wasserspiegel) zu halten. Hierzu dient eine Platte mit Membran oder ein Kolben, der von der einen Seite her mit dem Wasser in Berührung ist und gegen den sich von der anderen Seite her eine Spiralfeder gegenlegt. Der Kolben ist im Gleichgewicht, wenn Wasserdruck und Federkraft gleich sind; die Feder ist so reguliert, dafs dieses in der gewünschten Tiefe von 3 bis 4 m zutrifft. Überschreitet der Torpedo diese Tiefe, so nimmt der Wasserdruck nach dem bekannten hydrostatischen Gesetz zu; er ist nun stärker wie die Feder und drängt den Kolben zurück. Unterschreitet er diese Tiefe, so überwiegt die Federkraft; der Kolben rückt gegen das Wasser vor. Durch ein Stangenwerk und einen Schieber, der den Zutritt von Prefsluft zu den Steuern reguliert, ist der Kolben mit den genannten zwei Rudern in der Schwanzflosse verbunden; beim Zurückweichen des Kolbens werden die Ruder nach oben, beim Vordringen nach unten hin ausgelegt. Im ersten Falle wird daher durch den Druck des gegen die Ruder strömenden Wassers das Kopfende des Torpedos gehoben, im zweiten Falle gesenkt. In beiden Fällen wird die Abweichung gegen die eingestellte Tiefe solcher Weise korrigiert. Die Einrichtung des

*) Diese Angabe bezieht sich auf das Jahr 1900 (vgl. die Anm. am Schlufs des Paragraphen). Neuerdings wird eine erheblich gröfsere Schufsweite (in der englischen Marine bis zu 5000 m) angestrebt.

Tiefenapparates bringt es mit sich, daſs die Abweichung sogar stets überkorrigiert wird, so daſs eine Abweichung nach unten von einer solchen nach oben gefolgt wird, doch wird durch eine noch eigens vorgesehene Pendelvorrichtung, die die Steuer wieder zurücklegt, die Überkorrektion abgeschwächt. Im Ganzen wird sich also der Torpedo in einer flachen Wellenlinie um die vorgeschriebene Tiefe herumbewegen.

Der *Geradlaufapparat**) ist von dem österreichischen Ingenieur Obry konstruiert und hat den Zweck, den geraden Kurs des Torpedos, wie er durch die Visierrichtung beim Abschieſsen gegeben ist, festzuhalten. Seine Aufgabe ist mehr, die Seitenabweichungen von dem geraden Kurse zu *bemerken*, wie sie *aufzuheben* oder *rückgängig zu machen*. Die letztere Funktion fällt der Preſsluft zu, die von dem Windkessel in feinen Kanälen**) durch ein von dem Geradlaufapparat gesteuertes Ventil-System ausströmt und zwei miteinander fest verbundene Ruder auslegt, die, wie erwähnt, ebenfalls in der Schwanzflosse untergebracht sind, bei Linksabweichung nach rechts, bei Rechtsabweichung nach links. Der Geradlaufapparat hat gewissermaſsen nur die Innervation zu geben, während die eigentliche Arbeitsleistung — die Muskeltätigkeit, wie wir im Bilde des tierischen Körpers sagen könnten — von der Preſsluft des Windkessels verrichtet wird. Wir nennen diese Anordnung das *Prinzip des indirekten Geradlaufes*, weil der Apparat hierbei nur auslösend auf ein ergiebigeres Kraftreservoir wirkt und die erforderliche Richtungsänderung des Torpedos durch Vermittelung dieses letzteren erreicht wird. Das umgekehrte *Prinzip des direkten Geradlaufes* werden wir bei dem Howell-Torpedo kennen lernen, bei dem der Geradlaufapparat gleichzeitig die Funktion der Nerven und der Muskeln übernehmen soll. Der indirekte Geradlauf hat den groſsen Vorteil, daſs er nur kleine Kraftwirkungen verlangt, die durch einen Apparat von mäſsiger Masse erzielt werden können, während der direkte Geradlauf eine Vorrichtung erfordert, deren Massigkeit einigermaſsen der zu bewegenden Gesamtmasse des Torpedos proportioniert sein muſs. Der Obry-Apparat wiegt noch nicht 4 kg; die Ausführung seines Schwungringes, der Lager und des Ventilsystems ist Präcisionsarbeit, wie sie nur bei einem Apparat von geringen Maſsen möglich ist.

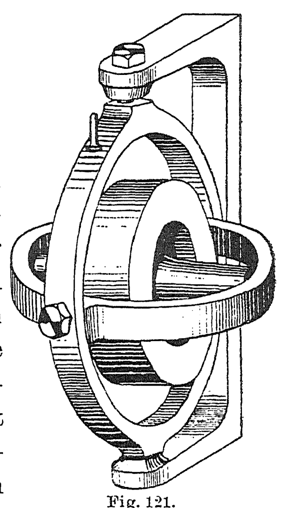
Wir haben schon oft auf die gyroskopischen Eigenschaften des Kreisels, d. h. auf seine Fähigkeit, eine Richtungsänderung zu bemerken, hingewiesen, z. B. bei Gelegenheit der Foucault'schen Versuche. Auf dieser Eigenschaft fuſst natürlich auch der Obry-Apparat.

---

*) Nähere Beschreibung desselben von Leutnant W. J. Sears in Engineering, Vol. 66, 1898, p. 89.

**) Der Druck der Preſsluft nimmt hierbei auf etwa 15 Atm. ab.

Die Gestalt des in ihm angeordneten Kreisels ist aus Fig. 121 ersichtlich: ein Schwungring im Cardanischen Gehänge, wie er ganz ähnlich auch von Foucault verwandt wurde. Der Schwungring hat 76 mm Durchmesser und wiegt 800 gr. In der normalen Stellung fällt seine Drehaxe mit der Längsaxe des Torpedos zusammen. Er läuft in einem inneren Ring, der um eine horizontale Axe drehbar ist, dieser in einem äufseren Ring, der um die Vertikale drehbar im Torpedokörper gelagert ist. Der Schwungring sitzt auf einer starken, nach den Enden hin konisch auslaufenden Axe, die auf der einen Seite mit Zahnvertiefungen versehen ist. In letztere greift der gezähnte Mantel einer Federtrommel ein, welche beim Einsetzen des Torpedos in das Lancierrohr gespannt und beim Abschiefsen entspannt wird. Eine selbstthätige Reguliervorrichtung stellt vor dem Spannen den Kreiselapparat in seine normale Lage, d. h. den inneren Ring horizontal, den äufseren Ring quer zur Längsaxe des Torpedos. Die dem Schwungringe übertragene Geschwindigkeit soll nach Angabe des Konstrukteurs 9000 bis 10000 Umdrehungen pro Minute betragen. Die Richtung des erzeugten Impulsvektors ist zugleich die Schufsrichtung.*)


Fig. 121.

Der Schwungring mufs äufserst sorgfältig centriert sein, so dafs sein Schwerpunkt genau in den Schnittpunkt der Drehaxe des äufseren und inneren Ringes fällt. Nur in diesem Falle behält der Impulsvektor seine Richtung während des Laufes bei. Im anderen Falle würde, nach den Bewegungsgesetzen des schweren Kreisels, die Figurenaxe des Schwungringes successive abgeändert werden und eine mehr oder minder reguläre Präcession um die Vertikale beschreiben. Der Apparat würde dann eine Krümmung der Torpedobahn bewirken, in derselben Weise, wie er bei centriertem Schwungrad die Bahn gerade richtet.

Besonders zu Beginn der Laufbahn können bedeutende Seitenabweichungen von der geraden Schusfrichtung stattfinden, beim Verlassen des Lancierrohres, beim Aufschlagen aufs Wasser, beim Durchschneiden der Wellenkämme, endlich wegen der besonders zu Anfang starken Thätigkeit der Tiefenapparat-Ruder, die bei einem Krängen des Torpedos nicht nur auf Tiefe, sondern gleichzeitig etwas zur Seite steuern. Alle diese Unregelmäfsigkeiten, die die Treffsicherheit stark beeinträch-

*) Wie man den Geradlaufapparat den neuerdings erhöhten Anforderungen an die Schufsweite (vgl. pag. 783 Anm.) angepafst hat, ist nicht bekannt geworden

tigen würden, hat der Geradlaufapparat anzuzeigen und mit Hülfe der Preſsluft und der Steuerruder auszugleichen.

Letzteres geschieht einfach folgendermaſsen: Wir denken uns den Torpedo aus seinem geraden Lauf, dessen Richtung durch die Schwungringaxe in Fig. 121 angezeigt wird, abgelenkt, so daſs der Torpedokörper eine Drehung um die Vertikale ausführt. An dieser Drehung nimmt der mit dem Torpedokörper verbundene, in der Figur angedeutete Bügel teil, in welchem der äuſsere Ring gelagert ist, *aber nicht dieser Ring selbst*, welcher durch die Kreiselwirkung stabiliert ist. Der Torpedokörper verdreht sich also bei einer Seitenablenkung relativ gegen diesen Ring. An dem Ringe ist ein in der Figur angedeuteter Stift befestigt. Um diesen greift mit etwas Spielraum auf beiden Seiten eine Gabel herum, die auf dem cylindrischen Ventilschieber aufsitzt. Der Schieber ist in einer Büchse drehbar, die mit dem Torpedokörper verbunden ist. Schieber sowohl wie Büchse sind mit feinen Bohrungen (Kanälen für die Preſsluft) versehen. Wenn nun der Torpedokörper gegen den äuſseren Ring dreht, stöſst die Gabel gegen den Stift; da der Stift nicht nachgiebt, wird die Gabel und der mit ihr verbundene Schieber gegen die Schieberhülse verdreht. Die Bohrungen, die ursprünglich nicht aufeinander paſsten und der Preſsluft keinen Zutritt zu der im hinteren Torpedoteile liegenden Steuermaschine des Geradlaufapparats gestatteten, schlieſsen sich jetzt zusammen; die Preſsluft strömt durch die Kanäle hindurch und drückt, je nachdem der Schieber im einen oder anderen Sinne verdreht ist, auf die eine oder andere Seite des Kolbens der Steuermaschine. Der Kolben legt mittels einer Stange und Hebelübertragung Seitenruder aus, und die Seitenruder lenken den Torpedo wieder nach dem geraden Kurs zurück, wie oben beschrieben.

Ähnlich wie bei dem Tiefenapparat wird auch hier die Abweichung beständig etwas überkorrigiert werden, da die Umsteuerung des Ventilschiebers und das Einziehen der Ruder erst erfolgen kann, wenn z. B. die Rechtsabweichung bereits in eine Linksabweichung übergegangen ist. Es wird daher die Horizontalprojektion der Torpedobahn ebenso wie die Vertikalprojektion eine Wellenlinie, die um die gerade Richtung herumoscilliert. Da starke Seitenabweichungen wie erwähnt nur zu Anfang der Bahn auftreten und die durch den Geradlaufapparat selbst hervorgerufenen Seitenoscillationen klein gegen jene anfänglichen Ablenkungen sind, so wird die Amplitude der Wellenlinie allmählich abnehmen und die Bahn sich der geraden Richtung der Visierlinie anpassen.

Daſs der Geradlaufapparat von Obry sicher funktioniert und praktisch brauchbar ist, wird am deutlichsten dadurch bewiesen, daſs er im

Torpedowesen fast aller Länder eingeführt ist. Allerdings setzt seine Handhabung Sachkenntnis und Sorgfalt in der dem Gebrauch vorhergehenden Justierung voraus.

Indem wir jetzt den Stabilierungsvorgang numerisch näher ins Auge fassen, haben wir uns auf die allgemeinen Ausführungen in § 1 unter IV zu beziehen. Hier wie dort handelt es sich darum, daſs ein schnell rotierender Schwungring von horizontaler Axe einem um die Vertikale wirkenden Moment scheinbar nicht, in Wirklichkeit nur sehr wenig nachgiebt. Nur in einem Punkte werden wir das allgemeine Stabilierungsschema des § 1, um uns besser an die Wirklichkeit anzuschlieſsen, abändern. Wir wollen nämlich unter A in Gl. (IVb), (IVc) und (IVe) nicht mehr das äquatoriale Trägheitsmoment des Schwungringes allein, sondern die Summe dieses und des Trägheitsmomentes des inneren Ringes um dessen Drehaxe (vgl. Fig. 121) verstehen, da letzterer an der Hebung der Figurenaxe bei der Cardanischen Aufhängung teilnimmt; ferner wollen wir in den Gleichungen (IVa) und (IV) linkerhand A ersetzen durch J und darunter die Summe der Trägheitsmomente des Schwungringes, des inneren und äuſseren Ringes um die vertikale Drehaxe des letzteren (vgl. Fig. 121) zusammenfassen, indem an den Änderungen des die Lage der Figurenaxe bestimmenden Winkels ψ auch der innere und äuſsere Ring beteiligt sind. Gl. (IV) geht damit über in

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{\Psi}{J} - \frac{N^2}{AJ}\psi,$$

und ihre Integration liefert an Stelle von (IVf) und (IVg) unter den entsprechenden Anfangsbedingungen:

$$\psi = \frac{A\Psi}{N^2}\left(1 - \cos\frac{N}{\sqrt{AJ}}t\right),$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Psi}{N}t + \frac{\Psi\cdot\sqrt{AJ}}{N^2}\sin\frac{N}{\sqrt{AJ}}t;$$

für den mittleren und den maximalen Ausdrehungswinkel ergiebt sich daher wie früher

$$\psi_m = \frac{A\Psi}{N^2} \quad \text{resp.} \quad 2\psi_m.$$

Um diesen Winkel giebt also im Mittel resp. im Maximum die Figurenaxe des Schwungringes und mit ihr die Ebene des äuſseren Ringes dem verdrehenden Momente Ψ anfangs nach, während sich gleichzeitig die Ebene des inneren Ringes langsam hebt, wobei die Widerstandsfähigkeit des äuſseren Ringes successive geschwächt, der Ausdrehungs-

winkel also allmählich vergröfsert wird. Das hier als constant angesehene Moment Ψ hat bei dem Torpedo einen doppelten Ursprung: einmal überträgt sich bei einer Seitenablenkung des Torpedos von dem Bügel der Fig. 121 auf das Lager des äufseren Ringes, wenn dieser wirklich im Raume fest bleibt, ein kleines Reibungsmoment, andererseits leistet der Ventilschieber, wenn er durch den äufseren Ring bewegt wird, einen kleinen Widerstand, der an dem Stifte der Fig 121 angreift und ebenfalls ein Moment um die Drehaxe des äufseren Ringes giebt.

Bei der folgenden Zahlenrechnung haben wir auf die früheren Angaben zurückzugreifen. Die Zahl der Umdrehungen pro Minute sollte 10 000 betragen; es ist also, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit in der Sekunde bedeutet:

$$\omega = \frac{10\,000}{60} \cdot 2\pi = 1{,}05 \cdot 10^3 (\mathrm{sec}^{-1}).$$

Wir dürfen diese Geschwindigkeit hier als konstant voraussetzen, obwohl sie in Wirklichkeit natürlich durch Reibung in den Lagern des Schwungringes allmählich geschwächt wird. Der Versuch zeigt nämlich, dafs der Schwungring bei den hier in Frage kommenden Anfangsgeschwindigkeiten etwa in 12 Minuten ausläuft, während der Torpedoschufs (s. u.) nur etwa 40 Sekunden dauert.

Die Masse des Schwungringes war 800 gr, sein Radius 38 mm. Wäre seine Masse ganz am äufseren Umfang verteilt, so würde das Trägheitsmoment um die Mittellinie im absoluten cgs-System betragen

$$800 \cdot 3{,}8^2 = 11{,}6 \cdot 10^3 (\mathrm{gr\,cm}^2);$$

wäre andrerseits die Masse gleichförmig auf einer Kreisscheibe angeordnet, so hätten wir als Trägheitsmoment nur

$$\frac{1}{2}\, 800 \cdot 3{,}8^2 = 5{,}8 \cdot 10^3 (\mathrm{gr\,cm}^2).$$

Die wirkliche Massenverteilung des Schwungringes ist so beschaffen, dafs sein Trägheitsmoment C kleiner als der erstgenannte, gröfser als der zweitgenannte Wert sein mufs. Wir nehmen als mittleren Wert etwa an

$$C = 8 \cdot 10^3 (\mathrm{gr\,cm}^2).$$

Für den Impuls N ergiebt sich somit

$$N = C\,\omega = 8{,}4 \cdot 10^6 (\mathrm{gr\,cm}^2\,\mathrm{sec}^{-1}).$$

Das Trägheitsmoment des Schwungringes um eine zur Mittellinie desselben senkrechte Axe würde $C/2$ sein, wenn die Masse lediglich in einer zur Mittellinie senkrechten Ebene verteilt wäre; in Wirklichkeit

fällt es etwas gröſser aus. Bei dem Trägheitsmoment A in unseren Formeln ist auſserdem das Trägheitsmoment des inneren Ringes um seine Drehaxe mitgerechnet. Es ist also um so mehr $A > C/2$; wir schätzen etwa

$$A = 5 \cdot 10^3 \,(\mathrm{gr\,cm}^2).$$

Bei dem Trägheitsmoment J um die Drehaxe des äuſseren Ringes kommt zu dem Trägheitsmoment des Schwungringes das des inneren Ringes um die Vertikale, welches im Allgemeinen gröſser ist wie das Trägheitsmoment desselben um seine Drehaxe, und auſserdem das des äuſseren Ringes hinzu. Es wird also $J > A$; wir nehmen

$$J = 6 \cdot 10^3 \,(\mathrm{gr\,cm}^2).$$

Endlich ist noch das äuſsere Drehmoment Ψ abzuschätzen. Bei der genauen Bauart des Apparates ist sowohl das übertragene Reibungsmoment im Lager des äuſseren Ringes bei einer Drehung des Torpedokörpers als auch der Widerstand des Ventilschiebers am Stifte des äuſseren Ringes klein. Wir gehen der Gröſsenordnung nach nicht fehl, wenn wir beide zusammen höchstens gleich dem Momente von 1 gr Gewicht an dem Hebelarme 1 cm ansetzen, also schreiben:

$$\Psi = g = \text{rund } 10^3 \,(\mathrm{gr\,cm^2\,sec}^{-2}).$$

Hiernach berechnen wir auf Grund der soeben wiederholten Formeln die folgenden Gröſsen:

1. die mittlere Ablenkung des äuſseren Ringes, zugleich die Amplitude seiner Schwankung

$$\psi_m = \frac{A\Psi}{N^2} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{(8{,}4 \cdot 10^6)^2} = 7 \cdot 10^{-8} = 0{,}015'',$$

2. die Schwingungsdauer des äuſseren Ringes, zugleich die des periodischen Teils in der Bewegung des inneren Ringes

$$\tau = 2\pi \frac{\sqrt{AJ}}{N} = 2\pi \frac{\sqrt{30} \cdot 10^3}{8{,}4 \cdot 10^6} = 4{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ Sekunden};$$

3. die reziproke mittlere Winkelgeschwindigkeit des inneren Ringes, d. h. diejenige Zeit, in der sich die Neigung ϑ des inneren Ringes um die Einheit des Winkels in Bogenmaſs ändert:

$$\frac{1}{\vartheta'_m} = \frac{N}{\Psi} = \frac{8{,}4 \cdot 10^6}{10^3} = 8{,}4 \cdot 10^3 \text{ Sekunden},$$

mithin diejenige Zeit, in der sich dieselbe Neigung um 1^0 beispielsweise ändert:

$$\frac{8{,}4 \cdot 10^3}{57{,}3} = 147 \text{ Sekunden} = 2^1/_2 \text{ Minuten}.$$

Diese Zahlen zeigen uns folgendes:

1. Die mittlere Ablenkung des äufseren Ringes ist thatsächlich durchaus unmerklich; der äufsere Ring ist durch die Kreiselwirkung völlig stabiliert.

2. Die Schwankungen des äufseren Ringes sind nicht nur wegen der Kleinheit ihrer Amplitude, sondern auch wegen der aufserordentlichen Kürze ihrer Periode unmerklich. Dasselbe gilt von den periodischen Schwankungen des inneren Ringes.

3. Dagegen würde die gleichförmige mittlere Drehung des inneren Ringes in einer nicht zu kurzen Beobachtungszeit sich bemerklich machen; immerhin tritt auch diese Bewegung bei den für den Torpedoschufs verfügbaren Zeiten noch kaum deutlich in die Erscheinung. Wir sagten, dafs ein Torpedo mit 15 m/sec Geschwindigkeit läuft und dafs die gröfste Schufsweite 600 m beträgt. Die Dauer des Schusses wird also höchstens 40 sec; für diese Zeit liefert unsere obige Rechnung eine Ablenkung des inneren Ringes um

$$\frac{40^0}{147} = 16',$$

also noch fast genau die ursprüngliche normale Stellung des inneren Ringes. Bei dieser geringen Abweichung bleibt die Widerstandsfähigkeit der äufseren Ringes fast ungeschwächt, so dafs die Anwendung unserer Näherungsformeln, welche nach § 1 unter IV) bei gröfseren Abweichungen versagen würden, hier berechtigt ist. Es kommt hinzu, dafs unsere obige Annahme eines zeitlich konstanten Momentes Ψ den wirklichen Verhältnissen nicht entspricht und den denkbar ungünstigsten Fall darstellt. In Wirklichkeit wechselt das Moment Ψ wegen der Gegenwirkung der Steuerruder und des daraus folgenden periodischen Charakters der Seitenablenkungen während eines Schusses mehrmals seinen Sinn; mit dem Momente Ψ kehrt sich aber auch der Drehungssinn des inneren Ringes um; die Winkeländerung ϑ des inneren Ringes wird auf diese Weise teilweise wieder rückgängig gemacht; mithin wird auch der innere Ring am Ende des Schusses noch fast genau dieselbe Lage aufweisen wie in der normalen Stellung beim Abschiefsen.

Man bemerke, dafs einen gewissen, wenn auch minimalen Einflufs auf die Wirksamkeit des Geradlaufapparates auch die Tiefenabweichungen des Torpedos haben. Wenn der Torpedokörper sich nach unten oder oben neigt, so wird die Drehaxe des äufseren Ringes dabei mitgenommen und um denselben Winkel wie die Mittellinie des Torpedokörpers gegen die Vertikale gedreht. Der innere Ring macht indessen diese Neigung in erster Näherung nicht mit, da er in seiner Drehaxe frei beweglich ist und durch die Kreiselwirkung des Schwungringes in seiner ursprünglichen horizontalen Lage festgehalten wird; nur insofern als in dem

Lager des inneren Ringes durch die Neigung des äufseren Ringes ein Reibungsmoment übertragen wird, kommt eine minimale mittlere Ablenkung des inneren Ringes und im Zusammenhange damit eine langsame Drehung des äufseren Ringes zustande. Die Rolle des inneren und des äufseren Ringes kehrt sich jetzt gegen die vorherige Betrachtung um, indem das primäre Reibungsmoment Ψ jetzt an der Axe des inneren Ringes wirkt. Eine merkliche Drehung des äufseren Ringes ergiebt sich auch hieraus nicht, da auch die Tiefenablenkungen periodisch wechseln. Wir erwähnen diese eigenartige Verkoppelung der Drehungen des inneren und des äufseren Ringes oder der Tiefen- und Seitenablenkungen hauptsächlich im Hinblick auf den sogleich zu betrachtenden *Howell-Torpedo.*

Die theoretische Überlegung erklärt also die günstigen Erfahrungen, die man mit dem Obry-Apparate gemacht hat.

Endlich haben wir als Gegenstück zu dem indirekten Geradlauf des Whitehead-Torpedos den *direkten Geradlauf beim Howell-Torpedo* darzustellen. Auch hier müssen wir mit einer allgemeinen Beschreibung dieses Torpedotyps beginnen.

Die äufsere Gestalt und die Abmessungen sind etwa die des Whitehead-Torpedos: Länge 4,27 m, gröfster Durchmesser 45 cm, Gesamtgewicht 520 kg. Etwa in der Mitte des Torpedos liegt querschiffs gelagert ein kräftiges Schwungrad vom Gewichte 133,8 kg, welches also einen wesentlichen Bruchteil des Gesamtgewichtes ausmacht. Die Ebene des Schwungrades fällt mit der vertikalen Mittellängsebene des Torpedokörpers zusammen. Vor dem Schufs wird dem Schwungrade mittels einer Dampfturbine eine Umdrehungszahl von 9500 Touren pro Minute erteilt, so dafs bei der bedeutenden Masse des Schwungrades ein erheblicher Arbeitsvorrat in ihm aufgespeichert wird. Es ist dies die einzige Energiequelle des Torpedos, durch die sowohl die Geschwindigkeit der Fortbewegung unterhalten, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit korrigiert werden soll. *Das rotierende Schwungrad dient beim Howell-Torpedo sowohl als Antriebsmaschine wie als Geradlaufapparat.*

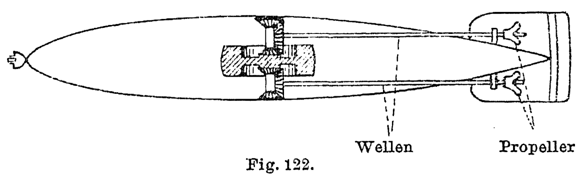


Fig. 122.

Die Umdrehungen des Schwungrades werden durch zwei konische Zahnräderpaare (vgl. Fig. 122) im Übersetzungsverhältnisse 2 : 1 direkt auf die Wellen der Propeller übertragen. Die Steigung der Propeller

ist automatisch verstellbar eingerichtet und wächst mit zunehmender Laufstrecke des Torpedos; hierdurch wird erreicht, dafs trotz der wegen der äufseren Arbeitsleistung beträchtlichen Abnahme der Schwungradumdrehungszahl die Geschwindigkeit des Torpedos annähernd konstant bleiben kann.

Um die dem Schwungrad innewohnende Richtkraft beurteilen zu können, fragen wir zunächst nach der Art und der Anzahl seiner Freiheitsgrade. Bei festgedachtem Torpedokörper hat das Schwungrad nur eine Bewegungsfreiheit, nämlich die einfache Drehung in sich. Die Axe dieser Drehung liegt hier querschiffs, während beim Obry-Apparat die entsprechende Axe des Schwungringes bei normaler Stellung desselben längsschiffs angeordnet war. Einen zweiten Freiheitsgrad haben wir in den Drehungen des Torpedos um seine Längsaxe — den Krängungen desselben — zu erblicken, durch welche die Schwungradaxe gegen die Horizontale geneigt wird. Diese Krängungen vertreten in gewisser Weise die Bewegungsfreiheit des inneren Ringes beim Obry-Apparat. Da der Howell- ebenso wie der Whitehead-Torpedo eine gewisse Stabilität besitzt (auch hier liegt der Schwerpunkt des Torpedos etwas unter dem der verdrängten Wassermasse), so werden die Krängungen im allgemeinen periodisch werden und Ausschläge nach der einen Seite von solchen nach der anderen Seite gefolgt werden. Als dritten Freiheitsgrad, entsprechend dem äufseren Ringe des Obry-Apparates, haben wir die Drehungen des Torpedos um die Vertikale anzusehen, die bei Seitenablenkungen eintreten. Drehungen um die horizontale, querschiffs gelegene Axe, die mit den Tiefenablenkungen verbunden sind, beeinflussen dagegen die Lage des Schwungrades nicht und fallen daher für uns aufser Betracht.

Das Zustandekommen der Kreiselwirkung haben wir uns hier in der folgenden Reihenfolge vorzustellen: Eine Seitenablenkung durch äufsere Einflüsse sei das Primäre. Sie würde den Impuls des Schwungrades horizontal zur Seite drehen; die Richtung der Impulsänderung ist dabei die Längsaxe des Torpedos. Um diese wirkt das hieraus folgende Gegenmoment der Kreiselwirkung K, Gl. IVb in § 1. Dieses bewirkt ein Krängen des Torpedos und damit eine Änderung des Neigungswinkels der Schwungradaxe gegen die Vertikale. Der Impuls wird dabei in vertikaler Richtung abgelenkt. Daher entsteht ein Gegenmoment K' (Gl. IVd in § 1) um die Vertikale, welche dem primären seitlich ablenkenden Momente entgegengerichtet ist.

Wir erkennen also, dafs eine Korrection der Seitenablenkungen durch die Kreiselwirkung auch hier eintritt, und dafs sie durch die Krängungen des Torpedos vermittelt wird. Dabei wird man nicht über-

sehen, daſs diese Krängungen weniger unbehindert vor sich gehen, wie die ihnen entsprechenden Drehungen des inneren Ringes beim Obry-Apparate, daſs vielmehr der Wasserwiderstand denselben in bedeutendem Maſse entgegenarbeitet. Indem er dieses thut und die Krängungsgeschwindigkeit herabsetzt, verkleinert er aber auch die schlieſsliche Richtkraft, deren Gröſse K' mit der Krängungsgeschwindigkeit ϑ' proportional gefunden wurde. Wegen dieses Wasserwiderstandes sowohl wie wegen der Mitwirkung der Schwere, durch die der Sinn des Krängens periodisch umgekehrt wird, liegen die Verhältnisse hier nicht so einfach und günstig, wie bei dem von der Torpedohülle ganz umschlossenen, sorgfältig justierten Obry-Apparat.

Wir können nun aber auch die Reihenfolge unserer obigen Überlegungen umkehren und ein Krängen des Torpedos als das Primäre ansehen. Namentlich beim Aufschlagen aufs Wasser würde dieses in bedeutendem Maſse durch äuſsere Einflüsse erzeugt. Genau in der oben beschriebenen Weise folgt hieraus durch Vermittelung der Schwungradwirkung ein Moment um die Vertikale, also eine *Seitenablenkung*. Wir könnten durch Fortsetzung der Schluſsreihe auf ein dem Krängen entgegenwirkendes Moment schlieſsen, wenn nicht bei der langgestreckten Gestalt des Torpedos der Wasserwiderstand gegen Seitenablenkungen so bedeutend wäre, daſs jenes Gegenmoment kaum mehr nennenswert ausfallen dürfte. Auſserdem interessiert uns nicht die Verhinderung des Krängens, sondern die der Seitenablenkungen. In letzterer Hinsicht zeigt aber unsere Überlegung: *Das Schwungrad des Howell-Torpedos scheint nicht nur eine Vorrichtung zu sein, um Seitenablenkungen zu verhindern oder rückgängig zu machen, sondern gleichzeitig auch um sie auf Grund anderweitig hervorgerufener Krängungen zu erzeugen.* Die eigenartige Verkoppelung von je zwei Freiheitsgraden des Kreisels, auf die wir schon oben aufmerksam machten, kommt hierin deutlich zum Ausdruck (Krängen und Seitenablenkung beim Howell-Torpedo, Seitenablenkung und Tiefenablenkung beim Whitehead-Torpedo).

Der Konstrukteur des Howell-Torpedos scheint die hier ausgesprochenen Befürchtungen über den schädlichen Einfluſs des Krängens als berechtigt anzuerkennen; denn er bringt Vertikalruder an, welche sich beim Krängen auslegen und die aufrechte Lage des Torpedos sichern sollen. Gegenüber dieser Anordnung kann man aber nicht umhin, die folgende Alternative zu stellen: *Entweder verhindern die Ruder das Krängen nicht; dann erzeugt dieses Seitenablenkungen. Oder sie verhindern es; dann behindern sie auch die Richtkraft; denn das Krängen ist ein notwendiges Zwischenglied bei der Entstehung des Gegenmomentes gegen Seitenablenkungen.* Sind die genannten Ruder wirklich

wirksam, so haben wir in dem Torpedo nurmehr einen Kreisel von *zwei* Freiheitsgraden vor uns; ein solcher besitzt aber nach dem im § 1 pag. 768 allgemein ausgesprochenen Prinzip keine Widerstandsfähigkeit gegen Richtungsänderungen.

Wir haben uns bei dieser Kritik der besonders interessanten und kühnen Howell'schen Konstruktion an die Ausführungen von Hn. Diegel*) angeschlossen, in dessen Arbeit andrerseits unsere obigen theoretischen Betrachtungen über den Obry-Apparat aufgenommen sind. Wir verweisen wegen weiterer Details auf die Darstellung dieses Fachmannes.

In der Praxis scheint sich der Howell-Torpedo nicht bewährt zu haben; wenigstens ist die Regierung der Vereinigten Staaten, die den Howell-Torpedo erworben hatte, nachträglich ebenfalls zu dem Whitehead-Torpedo mit seinem indirekten Geradlaufe übergegangen.

§ 4. Der Schlicksche Schiffskreisel. Allgemeines und Theorie.

Zu Anfang der siebziger Jahre des vorigen Jahrhunderts erbaute der um die Stahlindustrie hochverdiente englische Ingenieur Bessemer ein für den Ärmelkanal bestimmtes Schiff mit einer Salonkajüte, welche durch Kreiselwirkung am Rollen (Schwingungen um die Längsaxe des Schiffes) gehindert werden sollte. Die Kajüte war an zwei starken Zapfen so aufgehängt, dafs sie um eine horizontale längsschiffs verlaufende Axe ausschwingen konnte und trug ursprünglich ein mit ihr fest verbundenes Schwungrad. Hierbei war aber das wesentliche Prinzip jeder Kreiselstabilierung (vgl. pag. 767) übersehen: *Dem Bessemerkreisel fehlte ein Freiheitsgrad und damit die Möglichkeit, die Rollbewegung der Kajüte irgend zu beeinflussen.***) Die beabsichtigte Kreiselstabilierung wurde dann durch eine hydraulische Maschinerie***) ersetzt, die aber nicht mehr automatisch, sondern von Hand bethätigt wurde. Es scheint, dafs auch diese nicht befriedigend arbeitete; jedenfalls ist das Problem der Schiffsstabilierung erst dreifsig Jahre später von Otto Schlick in Hamburg erfolgreich aufgenommen worden, dem der Schiffbau bereits die Durchführung des Massenausgleichs der Schiffsmaschinen und damit

*) Selbstthätige Steuerung der Torpedos durch den Geradlaufapparat. Marine-Rundschau 5. Heft 1899. Das Manuskript des vorstehenden Paragraphen stammt ungefähr aus derselben Zeit; etwaige neuere Erfahrungen im Torpedowesen sind also nicht berücksichtigt.

**) Vgl. Institution of naval architects, April 1889, Bemerkungen von Macfarlane Gray in der Diskussion zu einem Vortrag von Beauchamp Tower.

***) Institution of naval architects, März 1875, Vortrag von E. J. Reed, on the Bessemer Steam Ship; vgl. auch Engineer, Aufsatz von Bessemer vom gleichen Datum.

die Möglichkeit der modernen, in Gröfse und Leistungsfähigkeit gesteigerten Schiffstypen verdankte.

Der *Schlicksche Schiffskreisel* hat zunächst die erforderlichen Freiheitsgrade. Er dreht nicht um eine im Schiff gelagerte Axe, sondern ist in einem Rahmen befestigt, der um eine querschiffs gelagerte Axe schwingen kann, wobei die Figurenaxe des Kreiselrades in der vertikalen Längsebene des Schiffes ausschwingt. Unsere Fig. 123 stellt schematisch die Anordnung auf dem Dampfer „Silvana“ der Hamburg-Amerika-Linie dar. Die Axe des Kreiselrades steht in der Figur lotrecht; beim Betriebe pendelt sie um diese Lage hin und her, wobei sie durch ein Übergewicht G in dieselbe zurückgezogen wird. Der Kreiselrahmen R mit seiner horizontalen Drehaxe ZZ ist in der Figur zu sehen, er trägt das mit S bezeichnete Kreiselrad. Letzteres hat einen Durchmesser von 1,6 m und ein Gewicht (ohne Axe) von 5100 kg. Es wird ihm eine Umdrehungszahl von 1800 Touren pro Minute erteilt, entsprechend einer Umfangsgeschwindigkeit von 150,8 m. Das Kreiselrad wird als Dampfturbine angetrieben, der Dampf tritt durch den einen Zapfen des Rahmens ein, durch den anderen aus. Die hohen Anforderungen an die Umfangsgeschwindigkeit (bei gufseisernen Schwungrädern werden gewöhnlich nur 30 bis 40 m Umfangsgeschwindigkeit zugelassen) erforderten natürlich sorgfältigste Ausführung und bestes Material. Die Anlage ist von Dr. Föttinger konstruiert und vom Stettiner „Vulkan“ ausgeführt. Seinen Platz findet der Schiffskreisel nahe der Mitte des Schiffes.

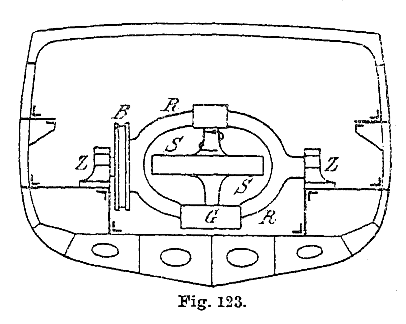


Fig. 123.

Aufser der „Silvana“ wurden auch der englische Dampfer „Lochiel“, ein Dampfer des Hamburger Staates und ein ausrangiertes Torpedoboot „Seebär“ der deutschen Marine, letzteres zur Vornahme der ersten orientierenden Versuche, mit einem Schiffskreisel ausgestattet. Außerdem wird ein Kreiselschiff in Danzig gebaut.

Wir bezeichnen zunächst die Aufgabe des Schiffskreisels im Allgemeinen. Zur Vermeidung der Seekrankheit sowie bei Kriegsschiffen zur Erleichterung der Geschützbedienung ist es geboten, die Amplitude der durch Seegang erzwungenen Rollbewegungen des Schiffes zu verringern, sowie die Dämpfung und womöglich auch die Periode der freien Rollschwingungen, die auf einen einmal hervorgerufenen seitlichen Ausschlag folgen, zu vergröfsern; die Schwingungen des Schiffes um seine Queraxe, das „Stampfen“, zu bekämpfen, liegt aufserhalb der Auf-

gaben des Schiffskreisels. Die dem Schiff bei einem Ausschlag erteilte Energie des Rollens kann durch den Kreisel natürlich nicht ohne Weiteres vernichtet, sondern nur umgesetzt werden in eine Schwingung des Kreiselrahmens gegen das Schiff. In dieser Form läfst sich die Schwingungsenergie aber durch geeignete Bremsvorrichtungen beseitigen (d. h. in Wärme verwandeln). Es ist eine Bandbremse (B in Fig. 123) sowie ein hydraulicher Bremszylinder, beide gegen den Kreiselrahmen wirkend, angeordnet. *In der Ermöglichung dieser Bremsung haben wir eine wesentliche Seite der Wirksamkeit des Schiffskreisels zu sehen.* Bei einem Wagen arbeitet ja die Bremse von dem Wagenkasten aus gegen die relativ dazu sich drehenden Räder. Bei dem Schiffskörper fehlt zunächst die Möglichkeit des Anlegens einer Bremse, da keine Relativbewegung der festen Teile vorhanden und der Wasserwiderstand, selbst wenn er durch Schlingerkiele unterstützt wird, nicht ausgiebig genug ist. Die Kreiselwirkung aber schafft eine energische Relativbewegung des Rahmens gegen den Schiffskörper und ermöglicht damit, dem letzteren eine Bremse anzulegen. Natürlich darf die Bremsung nicht so stark sein, dafs sie ein Ausschlagen des Kreiselrahmens überhaupt verhindert; sonst würden wir wieder auf den dem Schiffskörper fest eingebauten und daher wirkungslosen Schwungring zurückfallen. Dafs es ein geeignetes Mittelmafs von Bremsung giebt, welches die freien Schiffsschwingungen hinreichend stark dämpft, ohne die Kreiselwirkung zu unterbinden, und bei dem auch die erzwungenen Schwingungen heruntergesetzt werden, zeigt die Erfahrung und in Übereinstimmung mit ihr die theoretische Überlegung.

Über die Erfahrungen am Schiffskreisel werden wir im § 6 berichten. Wir wenden uns zunächst zu seiner Theorie. Vorab sei bemerkt, dafs wir die Verhältnisse schematisch wieder durch die Fig. 121 des Torpedokreisels darstellen können: Der äufsere Ring entspricht dem Schiffskörper, der innere dem Kreiselrahmen, der Schwungring unserem Kreiselrade. Der Unterschied ist zunächst nur ein quantitativer: der äufsere Ring ist im Falle des Schiffskreisels äufserst massig im Verhältnis zu den anderen Teilen zu denken. Dafs seine Drehaxe jetzt nicht vertikal, sondern horizontal gestellt wird, ist natürlich belanglos. Bei den zunächst zu betrachtenden freien Schwingungen wäre das äufsere Moment Ψ gleich Null, bei den durch Seegang erzwungenen Schwingungen periodisch wechselnd. Es giebt aber weitere Unterschiede, welche es bequemer erscheinen lassen, bei der Entwicklung der Formeln einen anderen Ausgangspunkt zu nehmen: Wir müssen jetzt die schon genannten Reibungswirkungen als wesentlich in die Theorie einführen, die wir früher nicht berücksichtigt haben; ferner

müssen wir beim Schiff und auch beim Kreiselrahmen ein aufrichtendes Schweremoment in Rechnung setzen, während wir früher den äufseren, inneren und Schwungring als genau centriert und daher der Schwere entzogen dachten. Wir gehen jetzt aus von der Betrachtung *zweier miteinander gekoppelter schwingungsfähiger Freiheitsgrade:* der eine Freiheitsgrad wird gebildet von den um die Längsaxe des Schiffes erfolgenden Rollbewegungen desselben, der andere von den um die querschiffs gelagerte Drehaxe stattfindenden Ausschlägen des Kreiselrahmens; die Koppelung beider besorgt die zwischen ihnen sich abspielende Kreiselwirkung. Den Freiheitsgrad des Kreiselrades um seine eigene Figurenaxe können wir als solchen ignorieren, da sein Impuls durch den Antrieb auf konstanter Höhe gehalten wird.

Strenge genommen hätte der Kreisel auch noch die Freiheitsgrade, die vom Stampfen des Schiffes und seinen etwaigen Drehungen um die Vertikale herrühren. Die letzteren werden aber schon wegen des grofsen ihnen entgegenwirkenden Wasserwiderstandes gering, andrerseits wird sich, wegen des grofsen Trägheitsmoments um die Schiffsqueraxe, die Pendelungsenergie des Kreiselrahmens nur in sehr geringem Mafse auf die Stampfbewegung des Schiffs übertragen. Wir betrachten also vorläufig das Schiff, abgesehen von seinen Rollbewegungen, als fest, werden aber im § 6 noch einmal auf die Stampfbewegungen zurückkommen und ihren Einflufs numerisch abschätzen (s. pag. 841).

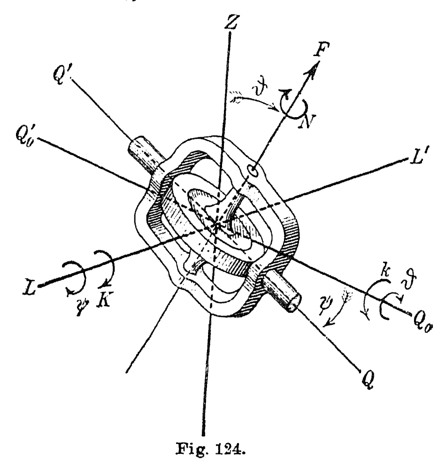


Fig. 124.

Sei ψ der Winkel der Rollbewegung des Schiffes um seine Längsaxe LL' (Fig. 124), ϑ der Drehwinkel*) des Rahmens um seine querschiffs gelagerte Drehaxe QQ', beide gezählt von der mittleren, aufrechten Lage des Schiffes resp. Kreiselrahmens aus.

In der Figur ist mit $Q_0 Q'_0$ die mittlere, horizontale Lage der Drehaxe QQ' bezeichnet, die dem Winkel $\psi = 0$ entspricht.

Betrachten wir zunächst die beiden Freiheitsgrade für sich, unter

*) Die Bezeichnungen ψ und ϑ sollen an die Eulerschen Winkel erinnern. In der That spielt die Längsaxe LL' hier dieselbe Rolle wie die Vertikale im § 1, um welche ψ gezählt wird. Nur war es zweckmäßig, mit ϑ nicht wie früher den Winkel zwischen LL' und der Figurenaxe, sondern sein Komplement zu bezeichnen.

Absehung von ihrer Koppelung. Die *freien Schwingungen des Schiffes* (bei festgestelltem Kreiselrahmen) werden bekanntermafsen durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$J\frac{d^2\psi}{dt^2} + W\frac{d\psi}{dt} + QH\psi = 0. \tag{1}$$

Hier bedeutet

J das Trägheitsmoment des Schiffes um die Längsaxe LL',

W den Widerstand des Wassers für die Einheit der Winkelgeschwindigkeit,

Q das Gewicht des Schiffes oder die Wasserverdrängung (Deplacement),

H die sog. metacentrische Höhe, so dafs QH das aufrichtende Moment für die Einheit der Winkelausdrehung angiebt*).

Wenn wir in dieser Gleichung die Koeffizienten als konstant ansehen, so ist das bekanntermafsen nur in erster Näherung (für hinreichend kleine ψ) richtig, indem in Wirklichkeit H eine komplizierte Funktion von ψ, und W eine einigermafsen unbekannte Funktion**) von $d\psi/dt$ ist. Indessen sollen alle folgenden Betrachtungen ebenfalls nur erste Näherungen im Sinne der *Methode der kleinen Schwingungen* sein, so dafs die Voraussetzung konstanter Koeffizienten ausreicht.

Die *freien Schwingungen des Kreiselrahmens* andererseits (bei fest gestelltem Schiff) werden durch die Differentialgleichung des „physikalischen Pendels" beschrieben:

$$j\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + w\frac{d\vartheta}{dt} + qh\vartheta = 0. \tag{2}$$

Hier bedeutet

j das Trägheitsmoment des Kreiselrahmens, einschliefslich des in ihm enthaltenen Schwungringes, um die Queraxe QQ',

w den Widerstand für die Einheit der Pendelungsgeschwindigkeit, der sich aus dem (nicht unbeträchtlichen) Zapfenwiderstand und dem am Umfange des Rahmens angebrachten Bremswiderstand zusammensetzt,

q das Gewicht von Kreiselrahmen und Kreiselrad,

h den Abstand des gemeinsamen Schwerpunktes beider von der Drehaxe QQ'.

---

*) Näheres Encykl. d. Math. Wiss. IV, Art. 6 von Stäckel, Nr. 39.

**) Näheres hierüber in Encykl. d. Math. Wiss. IV, Art. 22 von Kriloff und Müller, Nr. 8.

Aus (1) und (2) folgt die Periode der freien Schwingungen T und τ der beiden Freiheitsgrade, die wir unter Absehung von den Reibungswiderständen berechnen wollen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{QH}}, \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{j}{qh}}$$

oder die zugehörigen „Frequenzen“:

(3) $$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{QH}{J}}, \quad \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{qh}{j}}. \text{*)}$$

Unsere Pendelgleichung (2) gilt unabhängig davon, ob sich das Kreiselrad in Rotation befindet oder nicht. In der That machen sich die Kreiselwirkungen desselben nach dem mehrfach angezogenen Prinzip des § 1 bei der Bewegung erst geltend, wenn der Kreisel einen weiteren Freiheitsgrad erhält. Solange die Drehaxe QQ', wie bisher vorausgesetzt, festgehalten wird, äufsert sich die Kreiselwirkung nur als Druck auf die Lager und beeinflufst die Pendelbewegung in keiner Weise. Sie tritt aber in Wirksamkeit, wenn wir jetzt beide Freiheitsgrade gleichzeitig betrachten.

Schlägt die Kreiselaxe OF im Sinne der positiven ϑ (vgl. Fig. 124) aus, so entsteht eine Kreiselwirkung um die zu OF und OQ senkrechte Axe in solchem Sinne, dafs sie die Figurenaxe der Axe dieser hinzukommenden Drehung gleichsinnig parallel zu stellen, also die Halbaxe OQ zu senken sucht. Der in der Figur linke Zapfen der Querschiffsaxe (bei Q') erfährt dabei einen Druck nach oben, der rechte Zapfen bei Q einen solchen nach unten. Es sind das diejenigen Lagerdrucke, die bei Feststellung des Schiffes dieses aufzunehmen hat, die sich aber nun als Bewegungsmoment geltend machen. Mit Rücksicht auf den eben festgestellten Sinn, der dem positivem Sinne von ψ entspricht, wird die das Schiff bewegende Kreiselwirkung nach Gl. (I) des § 1:

(4) $$+ N\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Der Eigenimpuls N des Kreiselrades bestimmt sich in unserem Falle als das Produkt aus dem Trägheitsmoment des Kreiselrades (ohne Rahmen) um seine Figurenaxe und seiner durch den Turbinenantrieb erzeugten Winkelgeschwindigkeit.

Schlägt andererseits das Schiff im Sinne der wachsenden ψ aus, so ergiebt sich eine Kreiselwirkung um die zu OF und OL senkrechte

*) In dieser auch sonst vielfach gebrauchten Bezeichnungsweise bedeutet also „Frequenz“ die Schwingungszahl für die Zeiteinheit 2π sec.

Axe OQ. Dem Sinne nach sucht sie wieder die Figurenaxe der Axe OL gleichsinnig parallel zu stellen, wirkt also nach der Seite der abnehmenden ϑ. Nach Gl. (I) des § 1 wird daher Gröfse und Sinn dieser Kreiselwirkung gegeben durch

(4′) $$-N\frac{d\psi}{dt}.$$

Diese beiden Momente wirken wie äufsere Bewegungsmomente und sind als solche auf der rechten Seite der Gleichung (1) bezw. (2) zuzufügen.

Noch sei bemerkt, dafs die Anwendung der Gl. (I) bei der Berechnung von (4′) nur so lange berechtigt ist, als der Winkel zwischen OF und OL nahezu ein Rechter, also ϑ klein ist. Die genauere Gl. (II) würde statt (4′) den Wert $-N\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}$ ergeben (man beachte, dafs ϑ jetzt das Komplement des früheren ϑ bedeutet und daher sin durch cos zu ersetzen ist), der sich aber von (4′) nur um kleine Gröfsen höherer Ordnung unterscheidet. Ähnliches ist von der Berechnung der Kreiselwirkung (4) zu sagen, die eigentlich nicht um OL, sondern um die gemeinsame Senkrechte der Axen OQ und OF wirkt. Da diese mit OL den Winkel ϑ bildet, so würde zu (4) ebenfalls der Faktor $\cos\vartheta$ hinzutreten, der aber im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen wiederum gleich 1 zu setzen ist. Schliefslich kann man bemerken, dafs ein Ausschlag des Kreiselrahmens noch insofern auf die Schiffsbewegung Einflufs nimmt, als er das Trägheitsmoment J desselben abändert. Aber abgesehen davon, dafs auch diese Änderung nur durch höhere Potenzen des als klein vorausgesetzten Winkels ϑ gemessen wird und daher nach der Methode der kleinen Schwingungen ebenfalls zu vernachlässigen ist, ist die Masse der Kreiselvorrichtung zu der des ganzen Schiffes so verschwindend, dafs dieser Einflufs überhaupt nicht in Frage kommt.

Bei Hinzufügung von (4) und (4′) gehen nun die Gleichungen (1) und (2) in die folgenden *Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen des zusammengesetzten Systems Schiff und Kreisel* über:

$$J\frac{d^2\psi}{dt^2}+W\frac{d\psi}{dt}+QH\psi=+N\frac{d\vartheta}{dt},$$
$$j\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+w\frac{d\vartheta}{dt}+qh\vartheta=-N\frac{d\psi}{dt}.$$

Wir haben also nunmehr ein *gekoppeltes* (simultanes) *System zweier linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:*

(5) $$\begin{cases} J\frac{d^2\psi}{dt^2}+W\frac{d\psi}{dt}-N\frac{d\vartheta}{dt}+QH\psi=0, \\ j\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+w\frac{d\vartheta}{dt}+N\frac{d\psi}{dt}+qh\vartheta=0. \end{cases}$$

Die Koppelung ist eine *Geschwindigkeitskoppelung*, weil sie durch Glieder mit den ersten Differentialquotienten vermittelt wird. Sie ist überdies *konservativer* Natur, da sie keinen Energieverlust, sondern nur eine Energieübertragung bewirken kann. Analytisch drückt sich dies durch die entgegengesetzte Gleichheit der „Koppelungskoeffizienten" ($+N$, $-N$) in (5) aus und beweist sich durch Aufstellung der Energiegleichung wie folgt: Man multipliziere die beiden Gl. (5) bzw. mit $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\vartheta}{dt}$; dann fallen in der Summe die Koppelungsglieder heraus, und es ergiebt sich:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{J\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + j\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{QH\psi^2 + qh\vartheta^2\right\}$$

$$= -W\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - w\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Die beiden Glieder linker Hand bedeuten die Änderung der kinetischen und potentiellen Energie des Gesamtsystems. Die beiden Glieder rechter Hand können nach Lord Rayleigh als Dissipationsfunktion bezeichnet werden; sie sind allein durch die ursprünglichen Reibungsterme gegeben und von der Koppelung nicht beeinflufst.

Wir haben hier ebenso wie auf pag. 766 ein Beispiel für den von Kelvin eingeführten Begriff der *gyroskopischen Terme**); auch die Kelvin'sche Bezeichnung wird durch unseren Fall erläutert; unsere Koppelungsglieder sind Merkmale einer vorhandenen inneren Gyration des Systems, d. h. Kreiselwirkungen.

Wir kommen zur Integration des Systems (5). Diese geschieht in bekannter Weise durch den Ansatz:

$$\psi = Ae^{i\alpha t}, \quad \vartheta = ae^{i\alpha t}.$$

Die Gl. (5) liefern zwischen A, a, α die Bedingungen:

$$A(-J\alpha^2 + iW\alpha + QH) = +aiN\alpha$$

$$a(-j\alpha^2 + iw\alpha + qh) = -AiN\alpha$$

oder

$$\text{(6)} \qquad \frac{A}{a} = \frac{+iN\alpha}{-J\alpha^2 + iW\alpha + QH} = \frac{-j\alpha^2 + iw\alpha + qh}{-iN\alpha}.$$

Für α ergiebt sich also die Gleichung vierten Grades:

$$\text{(7)} \qquad (J\alpha^2 - iW\alpha - QH)(j\alpha^2 - iw\alpha - qh) = N^2\alpha^2.$$

Ihren vier Wurzeln α_1, α_2, α_3, α_4 entsprechen nach (6) vier Verhält-

---

*) Vgl. den Zusatz am Schlufs des § 4.

nisse der Gröfsen $A_1 : a_1$, $A_2 : a_2$, $A_3 : a_3$, $A_4 : a_4$. Die allgemeine Lösung der Gl. (5) schreibt sich nun:

$$(8)\quad \begin{cases} \psi = A_1 e^{i\alpha_1 t} + A_2 e^{i\alpha_2 t} + A_3 e^{i\alpha_3 t} + A_4 e^{i\alpha_4 t}, \\ \vartheta = a_1 e^{i\alpha_1 t} + a_2 e^{i\alpha_2 t} + a_3 e^{i\alpha_3 t} + a_4 e^{i\alpha_4 t}. \end{cases}$$

Von den hier vorkommenden 8 Koeffizienten bleiben 4 nach Gl. (6) willkürlich; sie genügen, die allgemeine Lösung einem willkürlichen Anfangszustande anzupassen.

Zum Zwecke einer späteren Anwendung wollen wir hier ein Beispiel mit einem speziell gewählten Anfangszustande näher ausführen.

a) Wir denken uns das Schiff zu Anfang um seine Längsaxe um einen Winkel ψ_0 ausgedreht, den Kreisel aber ruhend in seiner vertikalen Gleichgewichtslage. Die Anfangsbedingungen für $t = 0$ lauten dann:

$$\psi = \psi_0; \quad \frac{d\psi}{dt} = \vartheta = \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Wir wollen hier von der Dämpfung absehen, also $w = W = 0$ setzen. Dann wird nach (7): $\alpha_3 = -\alpha_1$, $\alpha_4 = -\alpha_2$ und man erkennt leicht, dafs die entsprechende Lösung sich aus (6) und (8) ergiebt zu*):

$$\psi = A_1 \cos \alpha_1 t + A_2 \cos \alpha_2 t,$$
$$\vartheta = a_1 \sin \alpha_1 t + a_2 \sin \alpha_2 t,$$

wobei noch:

$$(8')\quad a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 = 0, \quad A_1 + A_2 = \psi_0.$$

Mittels (6) und (8′) folgt dann das Verhältnis, in dem die beiden Schwingungen zu der Schiffsbewegung beitragen:

$$(8'')\quad \left|\frac{A_1}{A_2}\right| = \frac{(j\alpha_1^2 - qh)\cdot(QH - J\alpha_2^2)}{N^2\alpha_1^2}.$$

b) Hätten wir umgekehrt anfangs das Schiff in Ruhe angenommen und den Kreiselrahmen um einen Winkel ϑ_0 gedreht, so erhielten wir ganz analog die Darstellung:

$$(8''')\quad \begin{cases} \psi = A_1 \sin \alpha_1 t + A_2 \sin \alpha_2 t, \\ \vartheta = a_1 \cos \alpha_1 t + a_2 \cos \alpha_2 t, \\ A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0, \quad a_1 + a_2 = \vartheta_0, \\ \left|\frac{a_2}{a_1}\right| = \frac{(j\alpha_1^2 - qh)(QH - J\alpha_2^2)}{N^2\alpha_2^2}. \end{cases}$$

Wir verstehen nun unter α_1 die Wurzel, die, bei verschwindender Koppelung, in die Frequenz der freien Schiffsschwingung, unter α_2 diejenige, die in die Frequenz der freien Kreiselpendelung übergeht (s. Gl. (3)) und unterscheiden diese beiden Schwingungen als „Haupt-

*) Vgl. die ähnliche Darstellung der durch einen Anstoß abgeänderten, aufrechten Kreiselbewegung, pag. 368.

schwingung“ und „Nebenschwingung“. Schliefsen wir den Fall der Resonanz zwischen beiden Schwingungen aus, nehmen also $QH/J \neq qh/j$ an, so folgt in dem Falle a, dafs wegen des grofsen Trägheitsmomentes J bei allen praktisch erreichbaren Impulsen die Amplitude A_1 bedeutend über A_2 überwiegt, und umgekehrt im Falle b die Amplitude a_2 über a_1, während im ersten Fall das Verhältnis a_2/a_1, im zweiten das Verhältnis A_1/A_2 verhältnismäfsig wenig von der Einheit abweicht. Gab also (Fall a) das Schiff den Anlafs zu den Schwingungen, so überwiegt in der Schiffsbewegung der Anteil der Hauptschwingung, während sich auf den Kreisel beide Schwingungen etwa gleichmäfsig verteilen. Das entsprechend vertauschte Verhalten zeigt sich, wenn (Fall b) der Kreisel den Anstofs zu den Schwingungen giebt.

Andrerseits ist nach Formel (6), z. B. für die Nebenschwingung:

$$\left|\frac{A_2}{a_2}\right| = \left|\frac{N\alpha_2}{-J\alpha_2^{\,2} + QH}\right| \ll 1;$$

also wird (Fall b), ausgenommen bei naher Resonanz, die vom Kreisel auf das Schiff übertragene Nebenschwingung hier nur kleine Amplituden annehmen. Die entsprechende Formel im Falle a lautet bei der vom Schiff auf den Kreisel übertragenen Hauptschwingung

$$\left|\frac{a_1}{A_1}\right| = \left|\frac{N a_1}{-j\alpha_1^{\,2} + qh}\right|;$$

hier sind an Stelle der Gröfsen J, QH die viel kleineren j, qh getreten, so dafs das Verhältnis a_1/A_1 bei der Hauptschwingung für die praktisch vorkommenden Werte von N erheblich wird.

Da wir nun oben fanden, dafs bei den vom Schiff oder Kreisel angeregten Schwingungen je an den dem anderen Freiheitsgrad „induzierten“ Schwingungen beide Frequenzen etwa gleichmäfsig beteiligt sind, so ist das Ergebnis, das auch durch die Erfahrung bestätigt wird, folgendes: a) Das Schiff kann durch eine ursprüngliche Rollbewegung den Kreisel verhältnismäfsig stark anregen, b) dagegen können auch grofse Kreiselpendelungen das Schiff nur wenig zum Schwingen bringen, außer im Resonanzfalle, in welchem daher für genügende Abbremsung der Nebenschwingung zu sorgen sein wird.)

Die eingehende numerische Diskussion der Gl. (7) wird uns im folgenden Paragraphen beschäftigen. Um sie vorzubereiten, ist es nötig, die Gleichung so umzuschreiben, dafs darin nur *unbenannte Zahlen* vorkommen. Man kann etwa folgendermafsen vorgehen:

α_0 sei die durch (3) bestimmte Frequenz der reibungsfreien ungekoppelten Schiffsschwingungen:

$$(9) \qquad \alpha_0^{\,2} = \frac{QH}{J} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha_0};$$

ferner sei v das Verhältnis der Frequenz der reibungsfreien ungekoppelten Kreiselschwingungen*) zu derjenigen der Schiffsschwingungen:

(9′)
$$v^2 = \frac{qh}{j} : \frac{QH}{J} \quad \text{also} \quad \frac{qh}{j} = v^2 \alpha_0^2.$$

Führt man noch die ebenfalls unbenannten Abkürzungen**) ein:

(9″)
$$K = \frac{W}{J\alpha_0}, \quad k = \frac{w}{j\alpha_0}, \quad n^2 = \frac{N^2}{Jj\alpha_0^2},$$

so ergiebt sich aus (7) für die nunmehrige dimensionslose Unbekannte β die Gleichung:

(10)
$$(\beta^2 - iK\beta - 1)(\beta^2 - ik\beta - v^2) = n^2\beta^2.$$

Von den hier eingeführten Zahlen mifst n die Kreiselwirkung, k die Bremswirkung, K die ursprüngliche Dämpfung der Schiffsschwingungen, wobei K im Verhältnis zu k unter Umständen vernachlässigt werden kann. Dem Frequenzverhältnis v werden wir insbesondere auch den Wert 1 geben, in welchem Falle die ursprüngliche Schiffs- und Pendelschwingung in Resonanz stehen. Für $n = 0$ fallen die Wurzeln β in zwei Paare auseinander, die der ungekoppelten Schiffs- und Pendelschwingung entsprechen. Wir werden zu untersuchen haben, wie sich diese Paare bei wachsendem n und geeignet angenommenem k stetig verändern. Der aus der ungekoppelten ursprünglichen Schiffsschwingung herauswachsende Schwingungsmodus, den wir als „Hauptschwingung" bezeichneten, wird dabei an Dämpfung und unter günstigen Verhältnissen auch an Schwingungsdauer zunehmen, wie es zu Anfang dieses Paragraphen als wünschenswert gefordert wurde.

Indessen sind es nicht die *freien Schwingungen* von Schiff und Schiffskreisel, die uns in Rücksicht auf die Praxis in erster Linie interessieren, sondern die durch den Seegang *erzwungenen Schwingungen*. Der Bruchteil, auf den die Amplitude der letzteren durch den Kreisel herabgesetzt werden kann, liefert den einfachsten, wenn auch nicht den einzigen Mafsstab für die Wirksamkeit der Konstruktion.

Wir schreiben zunächst die Bewegungsgleichung des Schiffes bei festgestelltem Kreiselrahmen auf bewegter See hin. Hierzu führt

---

*) Von einem Verhältnis der Schwingungsfrequenzen kann natürlich nur die Rede sein, solange beide Schwingungen periodisch erfolgen. Dagegen behält unsere allgemeine in Gl. (9′) enthaltene Definition auch im aperiodischen Falle ihren Sinn. Wenn v weiterhin trotzdem vielfach kurz als Frequenzverhältnis bezeichnet wird, so ist dieses für die aperiodischen Fälle im übertragenen Sinne zu verstehen und auf die eigentliche Definition (9′) zurückzugreifen.

**) Die Dämpfungskonstante K hat natürlich nichts mit der sonst so bezeichneten Kreiselwirkung K zu thun.

folgende überschlägliche Überlegung*): Während auf glatter See das aufrichtende Moment die Mittelebene des Schiffes in die Vertikale einzustellen strebt und daher (s. Gl. (1)) dem Winkel ψ selbst proportional zu setzen ist, wirkt es auf bewegter See dahin, jene Ebene in eine gegen die Vertikale geneigte Richtung hineinzudrehen, die etwa senkrecht gegen die gewellte Wasseroberfläche steht, jedenfalls aber in derselben Periode wie diese und in einem von der Wellenamplitude abhängigen Betrage um die Vertikale schwankt. Das aufrichtende Moment ist jetzt proportional $\psi - \psi_0$ zu setzen, wenn ψ_0 die variable Neigung der genannten Gleichgewichtslage des .Schiffes gegen die Vertikale bedeutet. Wir tragen also in dem dritten Term der Gl. (1) $\psi - \psi_0$ an Stelle von ψ ein, während wir den ersten und zweiten Term ungeändert beibehalten. (Die Trägheitswirkung des rollenden Schiffes ist ja nach wie vor allein durch die Beschleunigung des Schiffes, der Wasserwiderstand wenigstens der Hauptsache nach durch die Drehgeschwindigkeit des Schiffes gegen die ganze Wassermasse, nicht wesentlich gegen seine wechselnde Oberfläche bestimmt.) Gl. (1) geht dabei über in

$$J\frac{d^2\psi}{dt^2} + W\frac{d\psi}{dt} + QH(\psi - \psi_0) = 0.$$

Wir nehmen einen regelmäfsigen harmonischen Zug von Wasserwellen an, den wir uns seitlich gegen das Schiff heranrollen denken. Sei ω die Frequenz der Wellen (gleich 2π geteilt durch die Schwingungsdauer), so kann ψ_0 proportional $\cos\omega t$ und daher

$$J\frac{d^2\psi}{dt^2} + W\frac{d\psi}{dt} + QH\psi = C\cos\omega t \tag{11}$$

gesetzt werden. Die Wellung der Wasseroberfläche wirkt also wie ein äufseres Moment $C\cos\omega t$ auf das Schiff ein, welches in der Periode der Wellen wechselt; seine Amplitude C wächst mit der Amplitude der Wasserwellen. Im Allgemeinen ist die Wasserform natürlich keine regelmäfsige Sinus- oder Cosinuslinie. Wir können sie aber immer für eine beliebige Zeitdauer in eine Reihe solcher zerlegen und jede einzelne für sich behandeln.

Ebenso wie aus der Gl. (1) die Gl. (11) durch Hinzufügung des Gliedes $C\cos\omega t$ entsteht, erhalten wir aus den Gleichungen (5) für die freien Schwingungen unseres gekoppelten Systems die folgenden *Differentialgleichungen***) *für die durch den Seegang erzwungenen Schwingungen* desselben:

---

*) Wegen näherer Ausführungen und Litteraturangaben vgl. Encykl. d. Math. Wiss. IV, Art. Kriloff und Müller 22, Nr. 4d.

**) Im Anschlufs an pag. 796 weisen wir darauf hin, dafs diese Gleichungen mit $W = w = H = h = 0$ übergehen in die Gleichungen (IVb) und (IVe) des § 1, wenn wir dort speziell $\Psi = C\cos\omega t$ setzen.

$$(12)\quad \begin{cases} J\dfrac{d^2\psi}{dt^2}+W\dfrac{d\psi}{dt}-N\dfrac{d\vartheta}{dt}+QH\psi=C\cos\omega t,\\ j\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}+w\dfrac{d\vartheta}{dt}+N\dfrac{d\psi}{dt}+qh\vartheta=0,\end{cases}$$

indem ja weder an der Bewegung des Kreiselrahmens noch an seiner Kreiselwirkung durch das äuſsere Moment direkt etwas geändert wird.

Auch die Integration dieses Gleichungssystems geschieht nach einem wohlbekannten Schema, bei dem wir ebenso wie oben am besten komplex rechnen.

Wir schreiben

$$\psi=Ae^{i\omega t},\quad \vartheta=ae^{i\omega t}$$

und ersetzen auch die rechte Seite der ersten Gl. (12) durch den komplexen Ausdruck

$$Ce^{i\omega t}.$$

Bestimmt man dann die komplexen Koeffizienten A, a durch die aus (12) folgenden Bedingungen:

$$(13)\quad \begin{cases} A(-J\omega^2+iW\omega+QH)-iaN\omega=C,\\ a(-j\omega^2+iw\omega+qh)+iAN\omega=0,\end{cases}$$

so genügt nicht nur unser komplexer Ansatz den durch Eintragen von $e^{i\omega t}$ an Stelle von $\cos\omega t$ modifizierten Gl. (12), sondern zugleich der reelle Teil desselben den ursprünglichen Gleichungen. Aus (13) folgt:

$$(14)\quad \begin{cases} A=C\dfrac{-j\omega^2+iw\omega+qh}{(-J\omega^2+iW\omega+QH)(-j\omega^2+iw\omega+qh)-N^2\omega^2},\\ a=C\dfrac{-iN\omega}{(-J\omega^2+iW\omega+QH)(-j\omega^2+iw\omega+qh)-N^2\omega^2}.\end{cases}$$

Bildet man den absoluten Betrag dieser Gröſsen, so hat man die Amplitude, bildet man das Verhältnis des imaginären und reellen Teiles und geht zum Arcus-Tangens über, so hat man die Phase der durch den Seegang erzwungenen Schiffs- und Kreiselschwingung.

Aus dieser partikulären Lösung von (12) erhält man die allgemeine, wenn man ihr die allgemeine Lösung (8) der Differentialgleichungen der freien Schwingungen superponiert. Indem letztere stets gedämpft, beim Schiffskreisel sogar absichtlich abgebremst sind, bleibt bei einem regelmäſsigen Wellenzuge nach kurzer Zeit nur noch unsere erzwungene Schwingung übrig, deren Amplitude uns also ein einfaches Maſs für die Wirksamkeit des Schiffskreisels liefert. Daſs diese, wie wir sagten, nicht das einzige Maſs ist, leuchtet ebenfalls ein. Es muſs die weitere Bedingung hinzukommen, daſs die freien Schwingungen, die bei dem nach Amplitude, Phase und Periode unregelmäſsigen Charakter des Seegangs immer wieder neu erzeugt werden, hinreichend schnell ab-

gedämpft werden. Andernfalls würde unter den wirklich obwaltenden Verhältnissen ein Endzustand, wie er durch unsere erzwungenen Schwingungen dargestellt wird, gar nicht erreicht werden.

Bei der Diskussion des folgenden Paragraphen werden wir daher gleichzeitig die beiden Punkte ins Auge zu fassen haben: Amplitude der erzwungenen Schwingung, Gl. (14), Dämpfung und Schwingungszahl der freien Schwingung, Gl. (10). Zur Vorbereitung mögen hier die Werte (14) in unbenannte Form umgeschrieben werden. Aufser den in den Gl. (9) definierten Gröfsen werden wir dabei die Abkürzungen benutzen:

$$(9''') \qquad \gamma = \frac{\omega}{\alpha_0}, \quad c = -\frac{C}{J\alpha_0^{\,2}},$$

so dafs γ das Verhältnis der Wellenfrequenz zur Eigenfrequenz des Schiffes bezeichnet. Dann ist (14) gleichbedeutend mit

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{A}{c} = \dfrac{\gamma^2 - ik\gamma - v^2}{(\gamma^2 - iK\gamma - 1)(\gamma^2 - ik\gamma - v^2) - n^2\gamma^2}, \\[2ex] \dfrac{a}{c} = \sqrt{\dfrac{J}{j}}\, \dfrac{in\gamma}{(\gamma^2 - iK\gamma - 1)(\gamma^2 - ik\gamma - v^2) - n^2\gamma^2} \end{cases}$$

und daher das Quadrat des Amplitudenverhältnisses $\dfrac{|A|}{|c|}$:

$$(16) \qquad \left|\frac{A}{c}\right|^2 = \frac{(\gamma^2 - v^2)^2 + k^2\gamma^2}{[(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - v^2) - (kK + n^2)\gamma^2]^2 + [k\gamma(\gamma^2 - 1) + K\gamma(\gamma^2 - v^2)]^2}.$$

Einschaltungsweise bestätigen wir auch an dieser Formel die mehrfach hervorgehobene Thatsache, dafs der festgestellte Kreisel völlig unwirksam wird, dafs sich nämlich für $k = \infty$ derselbe Wert von A wie für $n = 0$ ergiebt, welcher A_0 heifsen möge.

Im Allgemeinen wird man die Schiffsreibung K gegenüber der durch die Bremse gesteigerten Reibung des Kreiselrahmens vernachlässigen und also Gl. (16) ersetzen können durch:

$$(17) \qquad \left|\frac{A}{c}\right|^2 = \frac{(\gamma^2 - v^2) + k^2\gamma^2}{[(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - v^2) - n^2\gamma^2]^2 + k^2\gamma^2(\gamma^2 - 1)^2}.$$

Für das Schiff ohne Kreisel aber darf die Dämpfung K nicht unterdrückt werden, weil sonst im Fall der Resonanz zwischen Schiffsschwingung und Welle die Amplitude der erzwungenen Schiffsschwingung beständig anwachsen würde, was nur durch die Dämpfung vermieden wird.

Wir werden zu zeigen haben, dafs sich bei den in der Praxis vorliegenden Verhältnissen aus (16) oder (17) ein Wert $|A| < |A_0|$ berechnet, dafs also, wie es am Anfang dieses Paragraphen gefordert wurde, die Amplitude der erzwungenen Schwingungen durch den Schiffskreisel

im Allgemeinen heruntergesetzt wird. Als wirksamen Faktor werden wir hierbei die Gröfse n, also die Stärke des Kreiselimpulses erkennen, während die Dämpfung k hier im umgekehrten Sinne, also gegen die Herabsetzung der Amplitude, wirkt. Wir können im Grofsen und Ganzen sagen: *Bei den erzwungenen Schwingungen erweist sich die Trägheitswirkung, bei den freien die Reibungswirkung des Schiffskreisels als mafsgebend.*

Wir fügen einige Angaben über die Litteratur des Schiffskreisels an. Die Differentialgleichungen der freien Schwingungen wurden zuerst von H. Lorenz*), jedoch ohne Berücksichtigung der Bremswirkungen, aufgestellt und diskutiert. Fast gleichzeitig veröffentlichte A. Föppl**) eine eingehende, auch numerische Untersuchung der freien Schwingungen, bei der er nachdrücklich auf die wichtige Rolle der Bremsung hinwies. Die zusammenfassende Darstellung, die Föppl im 6. Bande seiner Vorlesungen über technische Mechanik giebt, ist uns erst bei der Korrektur bekannt geworden. Wir hoffen, dafs unsere in analytischer Hinsicht etwas weitergehende Darstellung die auf besonderer Sachkenntnis und eigener Anschauung beruhende Föppl'sche Behandlung zweckmäfsig ergänzen möge. Einen Ansatz für die erzwungenen Schwingungen giebt Malmström.***)

Schlick selbst beschreibt seine Konstruktion aufser in einigen kleineren Mitteilungen†) in einem Vortrag vor der Schiffbautechnischen Gesellschaft††), in dem auch die Grundlagen der Theorie und die praktischen Ergebnisse besprochen werden.

Die letzteren werden wir in § 6 darstellen; zu ihrem Verständnis müssen wir zunächst in etwas umständliche Diskussionen der Gl. (15) für die erzwungenen und (10) für die freien Schwingungen eintreten.

Unsere Kreiselwirkungen (4) und (4′) in den Schwingungsgleichungen sind Beispiele von „gyroskopischen Gliedern". Man denke sich ein mechanisches System von beliebig vielen nicht-cyklischen Freiheitsgraden ψ, ϑ, . . . und beliebigen cyklischen Bewegungen nach Art umlaufender Schwungräder φ, χ . . . Ihre Trägheitswirkungen machen sich in den Gleichungen der ψ, ϑ . . . durch Zusatzglieder, die „gyroskopischen Terme", bemerklich (vgl. den Zusatz zu § 1, IV, pag. 771), welche die Bewegungen der ψ, ϑ . . . miteinander verkoppeln. Bei kleinen Schwingungen sind sie linear in den nicht-cyklischen Geschwindigkeiten

*) Physikal. Zeitschr. 5 (1903) pag. 27.

**) Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing. 48 (1904) p. 478 und pag. 983.

***) Acta Societatis Fennicae, t. 35, 1907.

†) Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing. 50 (1906) pag 1466 und 1929.

††) Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1909, Nr. X. Vgl. auch Institution of Naval Architects, März 1904, mit einem theoretischen Anhang von A. Föppl.

mit Koeffizienten N, M, ..., welche von den cyklischen Impulsen abhängen. Daher ergiebt sich als allgemeine Form dieser Terme $N\psi' + M\vartheta' + \cdots$. Charakteristisch ist nun, daß in der Beschleunigungsgleichung für ψ der Koeffizient von ψ' verschwindet, derjenige von ϑ' entgegengesetzt gleich ist dem Koeffizienten von ψ' in der Beschleunigungsgleichung für ϑ. Das Koeffizientenschema dieser Terme ist also, wie man sich ausdrückt, ein „schiefes". Es ist wie pag. 801 leicht zu sehen, daſs daher die Energiegleichung durch die gyroskopischen Terme überhaupt nicht beeinfluſst wird. (Vgl. Natural Philosophy I, Art. 345 VII.)

Die Diskussion des Schiffskreisels als eines Systems gekoppelter Schwingungen hat eine weitergehende Bedeutung für alle diejenigen Aufgaben der Physik, die ihren Ausdruck in der Betrachtung gekoppelter Schwingungen finden; wir erinnern z. B. an den Zeeman-Effekt. Die Schwingungsdauer von Lichtwellen wird bekanntlich verändert, wenn die Lichtquelle in ein Magnetfeld gebracht wird. Man denkt sich in der Lichtquelle Systeme von Elektronen, so daſs jedes System eine Anzahl freier Schwingungen besitzt, analog zu unserer freien Schiffs- und Kreiselschwingung. Das System ist also zunächst durch eine Anzahl von Schwingungsgleichungen charakterisiert. Im Magnetfeld wird nun auf jedes Elektron eine auf seiner Bewegungsrichtung senkrechte, also konservative Kraft ausgeübt, so daſs auch die Gesamtenergie durch das Magnetfeld nicht verändert werden kann. Die Kraft ist erfahrungsmäſsig von der Geschwindigkeit des Elektrons und den Komponenten des Magnetfeldes bilinear abhängig. Diese beiden Bedingungen führen aber dazu (vgl. oben), daſs sich das Magnetfeld in den Schwingungsgleichungen durch den Zusatz „gyroskopischer Terme" bemerkbar macht. An Stelle der cyklischen Impulse treten jetzt die Komponenten der Feldstärke H, die Schwingungsgleichungen nehmen also die Form an:

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} + f_i \xi_i = \sum h_{ik} \frac{d\xi_k}{dt},$$

$$h_{ik} = -h_{ki}, \quad h_{ii} = 0,$$

wobei sich die h linear durch den Vektor H ausdrücken. Wie beim Schiffskreisel nach Gl. (10) die Beeinflussung der Schwingungen vom Parameter n^2 abhängt, so wird hier die „Verschiebung der Spektrallinien" von H^2 abhängen, also sehr klein sein bei kleinem H. Nur wenn die beiden freien Schwingungen in Resonanz standen, also im Fall $v^2 = 1$, erhalten wir, bei Absehen von der Dämpfung, aus (10):

$$\beta^2 - 1 = \pm n\beta, \quad \pm\beta = 1 \pm \frac{n}{2} + \cdots$$

also eine Beeinflussung der Schwingungen, die von der ersten Potenz n abhängt. Entsprechend wurde die magnetische Verschiebung der Spektrallinien von Zeeman zuerst in Fällen zusammenfallender Schwingungsfrequenzen (D-Linie) nachgewiesen. Ähnlich werden wir beim Schiffskreisel (vgl. pag. 819) das Zusammenfallen der Frequenzen von Schiffsschwingung und Kreiselschwingung in gewissem Sinne als günstigsten Fall erkennen, d. h. als denjenigen Fall, in dem der Kreisel in einer Hinsicht die Schiffsschwingung am stärksten beeinfluſst. Für nähere Ausführungen vgl. Encykl. d. math. Wiss. Bd. V 3, Art. 22 (Lorentz, Magnetooptische Phänomene) Nr. 31—43.

§ 5. Spezielle Diskussion der Wirkung des Schiffskreisels.

A. Erzwungene Schwingungen.

Die nähere Diskussion der im vorigen Paragraphen aufgestellten Ansätze beginnen wir mit der Besprechung der durch den Schiffskreisel beeinflufsten, vom Seegang erzwungenen Schwingungen.

Wenn wir vorerst die durch die Reibung im Wasser veranlafste Dämpfung K gegenüber der durch die Bremse bewirkten Dämpfung k vernachlässigen, so wird das Verhältnis der Amplitude A der erzwungenen Schiffsschwingung zu der Gröfse c, die die Amplitude der erregenden Welle mifst, nach Gl. (17):

$$(17) \qquad \left|\frac{A}{c}\right|^2 = \frac{(\gamma^2 - v^2)^2 + k^2\gamma^2}{[(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - v^2) - n^2\gamma^2]^2 + k^2\gamma^2(\gamma^2 - 1)^2}.$$

Die Beeinflussung der Amplitude, wie überhaupt des Schwingungsverlaufes, werden wir wesentlich nur als von den folgenden drei dimensionslosen Gröfsen abhängig betrachten:

dem Verhältnis der Frequenz der Welle zu der der freien, ungedämpften Schiffsschwingung, γ;

der Gröfse k, die die Dämpfung der Kreiselschwingung mifst;

der Gröfse n, dem Mafs für den dem Kreisel erteilten Impuls.

Für den Parameter v kommt in Betracht, ob er kleiner oder gröfser als 1 gewählt ist, ob also die freie Kreiselpendelung langsamer oder schneller als die Schiffsschwingung verläuft. Durch die Aufhängung des Kreisels kann v leicht variiert werden und wird zu 0, wenn er im Schwerpunkt unterstützt ist.

Ohne vorerst auf numerische Diskussionen einzugehen, sei nur bemerkt, dafs die freie Schwingungsdauer eines Schiffes je nach der Gröfse desselben zwischen sehr weiten Grenzen schwankt. Das Gleiche gilt von der Periode der Wellen, die zwar im Allgemeinen erfahrungsgemäfs für ein bestimmtes Meer einen bekannten mittleren Wert annimmt, aber beträchtlich um diesen schwankt und sich bedeutend von Meer zu Meer ändert. Aufserdem müssen wir, wie schon erwähnt, an eine Übereinanderlagerung mehrerer harmonischer Wellenzüge denken. Umsomehr wird das Verhältnis der beiden Frequenzen variieren, und es wird auch im praktischen Interesse berechtigt, für die Diskussion γ^2 als von 0 bis ∞ veränderlich zu betrachten.

Im Interesse der analytischen Diskussion werden wir auch zeitweilig $k^2 = 0$ annehmen. Thatsächlich kann dieser Wert nicht erreicht werden, da, auch abgesehen von der Anbringung der hydraulischen

Bremse, die Lagerreibung an dem schweren Kreisel immer eine sehr beträchtliche ist.

Eine obere Grenze für n^2 endlich ist nur durch technische Schwierigkeiten gegeben.

Für die graphische Darstellung der Funktion $\left|\frac{A}{c}\right|^2 = f(\gamma^2, k^2, n^2)$ wollen wir γ^2 als unabhängige Variable wählen, die Gröfsen k^2, n^2 werden dann als Parameter je eines Kurvensystems aufzufassen und aufserdem wird $v^2 \gtrless 1$ zu unterscheiden sein. Bei unserer Wahl der unabhängigen Variabeln γ^2 haben wir den Vorteil, an die bekannten Resonanzkurven aus der Theorie der erzwungenen Schwingungen anknüpfen zu können.

1. Abhängigkeit vom Impuls, Bremsung Null. Für $n = 0$, den Fall, in dem der Kreisel nicht auf das Schiff einwirkt, fallen natürlich in dem Ausdruck (17), alle Glieder fort, die von der Koppelung mit dem Kreisel herrühren, und es bleibt:

$$\left|\frac{A_0}{c}\right|^2 = \frac{1}{(\gamma^2 - 1)^2}, \tag{18}$$

d. h. der einfachste Fall einer Resonanzkurve ohne Dämpfung. Dabei ist mit A_0 die zu $n = 0$ gehörige Amplitude bezeichnet; in gleicher Weise werde die zu einem beliebigen Wert n gehörige Amplitude A_n genannt. Die Amplitude A_0 wächst in der Nähe von $\gamma = 1$, d. h. wenn die Welle in Resonanz mit der freien Schiffsschwingung steht, stark an, bleibt aber doch vermöge der hier vernachlässigten Wasserdämpfung K auch für $\gamma = 1$ endlich.

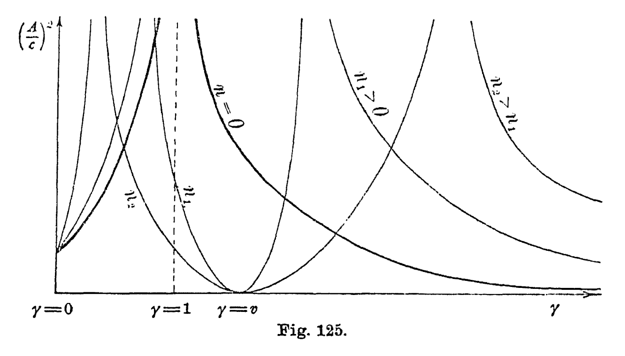


Fig. 125.

Wir lassen die in Fig. 125 und 127 stark ausgezogene „Grundkurve“ (18) nun mit wachsendem n^2 sich stetig verändern, unter Vorgabe eines festen Wertes von v^2. Für die Grenzen $\gamma = 0$ und $\gamma = \infty$ kann durch die Koppelung mit dem Kreisel keine Veränderung eintreten. Denn für die unendlich lange Periode der Wellen, $\gamma = 0$, tritt an Stelle der erzwungenen Schwingung die auf pag. 805 bezeichnete Gleichgewichtslage, unabhängig davon, ob der Kreisel rotiert oder nicht. In Übereinstimmung damit wird das mit n^2 behaftete Glied in (17) für $\gamma = 0$ selbst 0, so dafs sich stets ergiebt: $\left|\frac{A_n}{c}\right|^2 = 1$ für $\gamma = 0$.

Die unendlich rasche Schwingung, $\gamma = \infty$, kann bei rotierendem Kreisel ebensowenig eine erzwungene Schwingung anregen, wie bei stillstehendem, so dafs sich aus (17) für $\gamma = \infty$ ebenfalls unabhängig von n ergiebt: $\left|\frac{A_n}{c}\right| = 0$. Die sämtlichen Kurven des zu variablem n gehörigen Kurvensystems (Fig. 125) gehen daher von dem Punkt: $\gamma = 0$, $\left|\frac{A_n}{c}\right|^2 = 1$ aus und berühren bei $\gamma = \infty$ asymptotisch die γ-Axe.

Im vorigen Paragraphen fanden wir, dafs durch die Koppelung mit dem Kreisel an Stelle der einen freien Schiffsschwingung nun zwei freie Schwingungen treten, von denen die eine aus der ursprünglichen freien Schiffschwingung, die andere aus der auf das Schiff übertragenen Kreiselschwingung entsteht. Resonanzerscheinungen werden auftreten, wenn die Periode der Welle mit einer dieser beiden Perioden übereinstimmt.

In der That ist der Nenner in dem Ausdruck (17), der für $k = 0$ übergeht in:

(19) $$\left|\frac{A_n}{c}\right| = \frac{(\gamma^2 - v^2)}{[(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - v^2) - n^2\gamma^2|},$$

diejenige quadratische Funktion von γ^2, die nach Gl. (10) (pag. 804) verschwindet, wenn die Frequenz der Welle mit einer der Frequenzen des gekoppelten Systems zusammenfällt. Dafs dieser Nenner:

$$y = (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - v^2) - n^2\gamma^2$$

immer zwei positiv reelle Nullstellen, das System also zwei rein periodische Schwingungen hat, sieht man so: Im Fall $n = 0$ ist der Nenner für $\gamma^2 = 0$ und $\gamma^2 = \infty$ positiv und hat die zwei Nullstellen:

$$\gamma^2 = 1 \quad \text{und} \quad \gamma^2 = v^2.$$

Nimmt n^2 zu, so bleibt der Wert des Nenners für $\gamma^2 = 0$ unverändert, für $\gamma^2 > 0$ nimmt er ab, wird aber wieder positiv für genügend grofses γ, so dafs immer zwei positive Nullstellen bleiben (vgl. Fig. 126). Und zwar rückt die kleinere der beiden Nullstellen beständig in der Richtung des abnehmenden, die gröfsere in der Richtung des wachsenden γ^2, folglich wird schliefslich für $n^2 = \infty$ die kleinere Nullstelle zu $\gamma = 0$, die gröfsere zu $\gamma = \infty$.

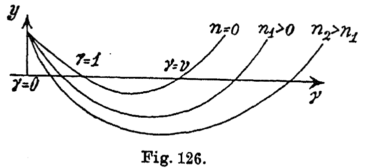


Fig. 126.

Wächst also n^2 von 0 zu positiven Werten, so geht die Grundkurve ($n = 0$) der Fig. 125 in eine Kurve mit zwei Unendlichkeitsstellen über, von denen die eine nahe bei der schon vorher vorhandenen Unendlichkeitsstelle $\gamma^2 = 1$ liegt, während die andere in der Nähe der Stelle

$\gamma^2 = v^2$ entsteht. An der Stelle $\gamma^2 = v^2$ selbst erhält aber auch der Zähler in dem Ausdruck (19) eine Nullstelle, so daſs also die Amplitude $|A|$ immer dann verschwindet, wenn die Welle in Resonanz mit der freien, unveränderten Kreiselschwingung steht. Im Falle $n^2 = 0$ hatten sich die Unendlichkeitsstelle und Nullstelle von $|A|$ bei $\gamma^2 = v^2$ gegenseitig zerstört.

2. Fallunterscheidung $v^2 \gtrless 1$. Es sei die aus $\gamma = 1$ entstehende Unendlichkeitsstelle mit γ_1, die aus $\gamma = v$ entstehende mit γ_2 bezeichnet; wir unterscheiden nun die zwei Fälle: $v^2 > 1$ (Fig. 125) und $v^2 < 1$ (Fig. 127), je nachdem die Periode der freien Kreiselschwingung kürzer oder länger als die der freien Schiffsschwingung ist. Es sei hier vorläufig bemerkt, daſs sich diese Unterscheidung auch später bei der Diskussion der freien Schwingungen als wesentlich erweisen wird.

Nach der Bemerkung zur Fig. 126 ist im ersten Fall ${\gamma_1}^2 < 1$, ${\gamma_2}^2 > v^2$. Die Amplitude wächst daher von ihrem Anfangswert $|A/c| = 1$ für $\gamma = 0$ an und wird für den Wert $\gamma^2 = {\gamma_1}^2$ unendlich. Dieser ist um so kleiner, liegt also um so weiter von dem ursprünglichen Pol $\gamma^2 = 1$ ab, je gröſser der Eigenimpuls des Kreisels ist. Von $\gamma = \gamma_1$ ab nimmt die Amplitude ab und wird zu 0 an der Stelle $\gamma = v$, wo die Kurve in Fig. 125 die γ-Axe berührt. Die Amplitude wächst wieder für gröſseres γ und wird noch einmal unendlich an der Stelle $\gamma = \gamma_2$. Dabei ist γ_2 um so gröſser, je gröſser n^2 ist. Für den Grenzfall $n = \infty$ würde (wie schon bemerkt) der Pol γ_1 nach 0, der Pol γ_2 nach ∞ rücken, und es würde für jeden von 0 und ∞ verschiedenen Wert von γ die Amplitude 0 werden.

Nach dem Vorhergehenden ergiebt sich, daſs es, im Hinblick auf die erzwungenen Schwingungen, günstig ist, den Kreisel so aufzuhängen, daſs seine freie Pendelschwingung möglichst in Resonanz mit dem Wellenzuge steht, d. h. $v = \gamma$ wird. In diesem Falle wäre die erzwungene Schwingung beim Schiff überhaupt verschwunden. Für die Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung des Kreisels ergäbe sich dann aus (15) (pag. 807):

$$\frac{a}{c} = -\frac{i}{n \cdot v}\sqrt{\frac{J}{j}},$$

d. h. die Amplitude der erzwungenen Kreiselschwingung wäre um so kleiner, je gröſser der Eigenimpuls des Kreisels gewählt ist, in der Phase müſste die Schwingung um eine Viertel-Periode gegen die Welle verzögert sein. In dieser Phase und Amplitude einmal angeregt, kann dann die Kreiselschwingung immer gerade das entgegengesetzte Moment auf das Schiff ausüben als die Welle, so daſs das Schiff, abgesehen

von anderen Umständen, in Ruhe bleibt. Die Notwendigkeit eines grofsen n folgt hier analytisch daraus, dafs für kleines n die Amplitude der Kreiselschwingung sehr grofs werden müfste, und damit die Zulässigkeit unserer Ableitung, die ja nur kleine Ausschläge voraussetzt, fortfällt.

Da wir es aber überhaupt nicht mit einer harmonischen Welle zu thun haben, sondern mit einer Übereinanderlagerung mehrerer, und andererseits die freie Kreiselschwingung nie ungedämpft ist, so kann von einer genauen Befolgung dieses Prinzips gar keine Rede sein.

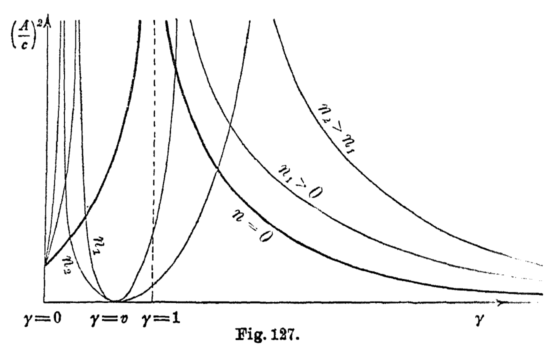


Fig. 127.

Der zweite Fall, $v^2 < 1$ (s. Fig. 127), ist nur dadurch vom ersten verschieden, dafs die Amplitude zunächst für den Wert $\gamma_2 < v$ unendlich wird, dann für $\gamma = v < 1$ Null, wie im ersten Fall. Von hier ab wächst sie mit wachsendem γ und wird noch einmal unendlich für einen Wert $\gamma_1 > 1$, nimmt dann schliefslich wieder ab, um für $\gamma = \infty$ Null zu werden. Dabei rückt jetzt mit wachsendem n^2 der Pol γ_2 von der Stelle $\gamma = v$ aus immer mehr nach 0 hin, der Pol γ_1 von 1 aus immer mehr nach ∞.

3. Folgerungen über die Wirkung von n. Um nun einen Mafsstab für die Günstigkeit der Koppelung mit dem Kreisel zu gewinnen, haben wir in Fig. 125 und 127 die Kurven für endliches n mit der Grundkurve für $n = 0$ zu vergleichen. Fragen wir zunächst nach den Wellenlängen, für die die Amplitude überhaupt nicht verändert wird, also $A_n = A_0$ ist. Auch hierbei setzen wir vorläufig $k = 0$ voraus.

Wir erhalten aufser den Stellen $\gamma = 0$ und $\gamma = \infty$ noch weitere, die nach (18) und (19) durch die folgende Gleichung bestimmt sind:

$$2(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - v^2) - n^2\gamma^2 = 0.$$

Es giebt zwei positive Werte von γ^2, die diese Bedingung erfüllen, sie sollen γ'^2 und γ''^2 heifsen. γ' und γ'' sind also die Abscissen der Punkte, in denen die Kurve von beliebigem n diejenige für $n = 0$ schneidet. Dann liegt γ' ersichtlich zwischen 1 und γ_1, γ'' zwischen v und γ_2. Wir entnehmen den Figuren:

Für alle Wellen, deren Frequenz zwischen γ' und γ'' liegt, ist die Wirkung des Kreisels eine günstige, d. h. die Amplitude der erzwungenen Schwingungen wird durch ihn verringert. Für alle anderen Wellen dagegen ist die Wirkung eine ungünstige.

Insbesondere ist klar: An der Stelle $\gamma^2 = 1$, d. h. in der Nähe der Resonanz mit der freien Schiffsschwingung bei ausgeschaltetem Kreisel, ist die Wirkung immer eine günstige. Sicher ist auch das ganze Gebiet zwischen $\gamma^2 = 1$ und $\gamma^2 = v^2$ günstig beeinflufst, da für $\gamma^2 = v^2$ noch $A_n = 0$ ist.

Demnach sehen wir auch: *Ist $v^2 > 1$, so enthält das günstig beeinflufste Gebiet im Wesentlichen Wellenlängen mit $\gamma^2 > 1$, ist $v^2 < 1$, so enthält es im Wesentlichen Wellenlängen mit $\gamma^2 < 1$.* Bezüglich der Impulsstärke folgt: *Durch Vergröfserung von n^2, also des Eigenimpulses, wird das Gebiet nach beiden Seiten hin erweitert, indem die Stellen γ', γ'' den Polen γ_1, γ_2 nachfolgen.*

Nach dem Vorhergehenden können wir die günstige Wirkung des Kreisels auf die erzwungenen Schwingungen darin erblicken, dafs er, *bei geeigneter Aufhängung, die Frequenz der Eigenschwingungen des Schiffes möglichst von der Frequenz der Wellen entfernt, also schädliche Resonanzwirkungen ausschaltet.*

4. Abhängigkeit von der Bremsung k. Wir gehen nun dazu über, die bisher vernachlässigte Dämpfung k mit zu berücksichtigen. Wir können ihre Wirkung leicht dadurch diskutieren, dafs wir die bisher erhaltenen Figuren entsprechend modifizieren.

Bemerken wir zu dem Ende, dafs der vollständige Ausdruck (17) des Amplitudenwerts, wenn wir $y = |A/c|^2$ setzen und den Nenner heraufmultipliziert denken, sich folgendermafsen schreiben läfst:

$$f(y, \gamma) + k^2 g(y, \gamma) = 0. \tag{18 c}$$

Hier bedeutet $f(y, \gamma) = 0$ eine der vorher gezeichneten Kurven, wie sie einem bestimmten Werte von n im Falle $k = 0$ entsprachen. Für $k = \infty$ andererseits haben wir $g(y, \gamma) = 0$; diese Kurve mufs mit unserer „Grundkurve" für $n = 0$ übereinstimmen, wie man leicht nach (17) bestätigt, da ja ein unendlich stark gebremster Kreisel ebenso unwirksam ist wie ein nicht rotierender. Die Schnittpunkte der beiden Kurven $f = 0$ und $g = 0$ wurden soeben mit γ', γ'' bezeichnet; durch sie mufs nach (18 c) auch die Kurve für ein beliebiges k hindurchgehen.

An diesen zwei Stellen γ', γ'', die aber übrigens von dem Wert n^2 und v^2 abhängen, hat also die Dämpfung keinen Einflufs auf die Amplitude der erzwungenen Schwingung. Für die anderen Werte von γ^2 ist nur zu beachten, dafs sich $|A/c|^2$ als lineare Funktion von k^2 mit wachsen-

dem k^2 beständig in gleichem Sinne verändert, und für keinen endlichen positiven Wert von k^2 verschwindet oder unendlich wird. Wir erhalten also das Kurvenbüschel, das zu einem festen n^2 und v^2 und variablem k^2 gehört, wenn wir die entsprechende Kurve in Fig. 125, bezw. 127 kontinuierlich in die Grundkurve $k = \infty$ überführen (vgl. Fig. 128).

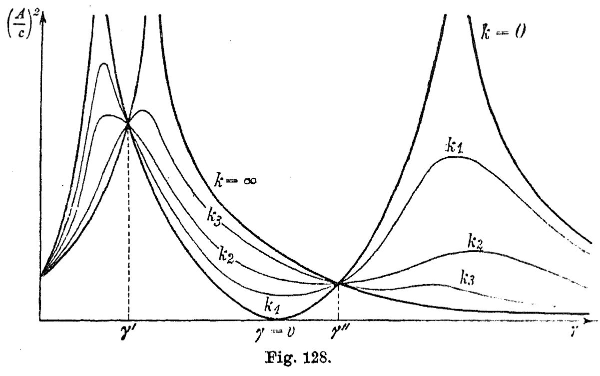


Fig. 128.

Dabei nimmt die Ordinate überall zu, wo sie kleiner als die der Grundkurve (18) war, überall ab, wo sie gröfser als diese war. Also: *Durch die Bremsung k wird die Wirkung des Kreisels auf die Amplitude der erzwungenen Schwingung überall abgeschwächt.* War die Wirkung ohne Dämpfung günstig, so wird sie ungünstiger durch die Dämpfung, war sie dagegen ungünstig, so wird sie günstiger. Demnach können wir jetzt erst recht das Resultat formulieren: *Die günstige Wirkung des Kreisels auf die erzwungenen Schwingungen besteht nur darin, dafs er die Frequenz der freien Schiffschwingungen bei geeigneter Aufhängung und geeigneter Impulsstärke möglichst von der Frequenz der Wellen entfernt.*

Wir finden darin den ersten Teil der am Ende des vorigen Paragraphen (pag. 808) aufgestellten Behauptung bestätigt, dafs nämlich für die erzwungenen Schwingungen die *Trägheitswirkungen des Kreisels der mafsgebende Faktor* sind, während die Dämpfung die Wirkung hier nur abschwächt. Voraussetzung für das reine Auftreten der erzwungenen Schwingungen ist aber, wie wir nochmals betonen, dafs die freien Schwingungen durch die Bremse genügend abgedämpft sind.

B. Freie Schwingungen.

1. Hauptschwingung und Nebenschwingung. Im Folgenden haben wir nach Schwingungsdauer und Dämpfung der durch den Schiffskreisel abgeänderten freien Schiffsschwingungen zu fragen, d. h. die Wurzeln der Gl. (10), pag. 804:

$$(\beta^2 - 1)(\beta^2 - ik\beta - v^2) - n^2\beta^2 = 0 \tag{10}$$

bei variablem n^2, v^2, k zu diskutieren. Wie schon im vorigen Paragraphen (pag. 802) bemerkt, treten an Stelle der einen freien Schiffs-

schwingung durch Koppelung mit dem Kreisel zwei auf. Die eine ist aus der eigentlichen Schiffsschwingung entstanden (Hauptschwingung), die andere aus der freien Pendelung des Kreiselrahmens und durch die Koppelung mittels des Eigenimpulses auf das Schiff übertragen (Nebenschwingung).

Wir könnten diese Gleichung 4. Grades, deren konjugierte Wurzelpaare die Schwingungen bestimmen, algebraisch auflösen. Für die Diskussion wäre damit aber wenig gewonnen, insbesondere wäre aus der komplizierten Form der Lösungen kaum zu sehen, wie sich die beiden Schwingungen aus der ursprünglichen Schiffs- und Kreiselschwingung bei wachsendem n^2 stetig ableiten. Wir benutzen daher besser „Kontinuitätsmethoden".

Für den dämpfungsfreien Fall $k = K = 0$ haben wir bereits in dem Abschnitt über die erzwungenen Schwingungen, S. 812, an Fig. 126 erkannt, dafs von den beiden Schwingungen, Haupt- und Nebenschwingung, die raschere mit wachsendem n^2 immer noch weiter beschleunigt, die langsamere weiter verzögert wird. Die Periode der Schiffsschwingung wird also in diesem Falle verlängert, wenn die Periode der Kreiselschwingung kürzer war, verkürzt, wenn sie länger war, als die der Schiffsschwingung. Dem entsprach die Bewegung der Pole in den Resonanzkurven, Fig. 125 bezw. 127. Schliefslich wurde für unendlich grofses n^2 die Periode der einen Schwingung 0, die der anderen ∞.

Berücksichtigen wir die Dämpfung, so müssen wir die Wurzeln, statt wie in Fig. 126 als Punkte der reellen Axe, als Punkte einer komplexen Ebene $x + iy$ darstellen. Der reelle Teil x bezeichnet dann die Frequenz, der imaginäre iy die Dämpfung, so dafs $2\pi y/x$ das logarithmische Dekrement bedeutet, solange die Schwingung nicht aperiodisch gedämpft ist. Wir können dann natürlich nicht mehr die einfache Schlufsweise wie bei Fig. 126 über den Verlauf der Wurzeln anwenden.

Dafs jetzt keine der Wurzeln von (10), wie im dämpfungsfreien Fall, rein reell sein kann (auch wenn $K = 0$ ist, ausgenommen für $n^2 = 0$ oder $n^2 = \infty$), wird sich in der folgenden Diskussion ergeben. Beide Schwingungen sind also gedämpft. Doch sind rein imaginäre Wurzeln, also aperiodisch gedämpfte Schwingungen, möglich. Negativ imaginäre Wurzeln dagegen, d. h. ein aperiodisches Anwachsen des Ausschlags von Schiff, bezw. Kreisel, schliefst die Form der Gl. (10) aus, da eine negativ imaginäre Wurzel die linke Seite von (10) zu einer Summe von lauter positiven Gliedern machen würde. Dafs auch keine Wurzeln mit negativ imaginärem Teil, also anwachsende Schwingungen, existieren, werden wir gelegentlich der näheren Diskussion

(vgl. pag. 824) noch zeigen, es läfst sich übrigens ohne Beweis vorhersehen, da solche Lösungen mit der immer negativen Dissipationsfunktion im Energieprinzip, pag. 801, nicht verträglich wären.

Um die beiden Schwingungen in den Wurzeln zu unterscheiden, soll im Folgenden das zur *Hauptschwingung* gehörige Paar immer mit $\zeta_1 \zeta_2$, das zur *Nebenschwingung* gehörige mit $\eta_1 \eta_2$ bezeichnet sein. Für $n^2 = 0$ ist dann

$$\zeta_1, \zeta_2 = \pm 1;$$

$$\eta_1, \eta_2 = \frac{ik}{2} \pm \sqrt{v^2 - \frac{k^2}{4}}.$$

Die 4 Wurzeln beschreiben bei variablem n^2 Bewegungskurven in der komplexen Ebene, die wir zu untersuchen haben. Solange die Schwingungen periodisch sind, werden die Kurven für ζ_1 und ζ_2, bezw. η_1 und η_2 symmetrisch zur imaginären Axe*); bei aperiodischem Verhalten fallen die Kurven in die imaginäre Axe zusammen.

2. Näherung für kleinen und grofsen Impuls. Wir suchen zunächst, wie sich die Wurzeln von (10) verändern, wenn n^2 von 0 zu einem kleinen positiven Wert übergeht, wobei der gröfseren Übersichtlichkeit halber wieder $K = 0$ angenommen werden soll. Wir bemerken aber gleich, dafs die folgende Methode sich ebenso im Fall $K > 0$ anwenden läfst und die Resultate dann nur unwesentlich geändert werden.

Die Gl. (10) kann als Gleichung für das Paar $\zeta_1 \zeta_2$ geschrieben werden:

$$\zeta^2 - 1 = \frac{n^2}{\zeta^2 - ik\zeta - v^2}.$$

Wir suchen die Wurzel ζ_1, die aus der Wurzel $\zeta_1 = +1$ entsteht, setzen demnach auf der rechten Seite als erste Näherung $\zeta = +1$, und erhalten daraus die zweite Näherung:

$$\zeta_1 = +\sqrt{1 + \frac{n^2}{1 - v^2 - ik}},$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{n^2(1 - v^2)}{(1 - v^2)^2 + k^2} + \frac{i}{2} \frac{n^2 k}{(1 - v^2)^2 + k^2}.$$

Die Quadratwurzel ist nach n^2 entwickelt und nur das erste Glied berücksichtigt. Ebenso wird:

$$\zeta_2 = -1 - \frac{1}{2} \frac{n^2(1 - v^2)}{(1 - v^2)^2 + k^2} + \frac{i}{2} \frac{n^2 k}{(1 - v^2)^2 + k^2}.$$

Daraus folgt:

---

*) Ein Wurzelpaar von der Form $a + ib$, $-a + ib$ soll „konjugiert reell", in Analogie zur Bezeichnung „konjugiert imaginär" heifsen.

War die Schiffsschwingung ungedämpft, so wird sie bei wachsendem n^2 *gedämpft.*

Die Frequenz der Hauptschwingung nimmt ab oder zu, je nachdem die Frequenz der Kreiselschwingung gröfser oder kleiner ($v^2 \gtrless 1$), *als die der Schiffsschwingung war.*

Wir bestätigen auch wieder, dafs die Wirkung des Kreisels verschwindet, wenn die Dämpfung k unendlich wird. Andrerseits verschwindet der Dämpfungszuwachs $\frac{n^2}{2} \frac{k}{(1-v^2)^2+k^2}$ natürlich auch, wenn $k=0$ ist. Zwischen $k=0$ und $k=\infty$ mufs er also ein Maximum haben; die Differentiation des genannten Dämpfungszuwachses ergiebt, dafs dieses für den folgenden Wert von k eintritt:

$$k^2_{\max} = (1-v^2)^2.$$

Während die Hauptschwingung an Dämpfung zunimmt, nimmt die Dämpfung der Nebenschwingung von ihrem ursprünglichen Wert $ik/2$ aus (vgl. pag. 818) ab, da die Summe der Dämpfungen, d. h. die Summe der 4 Wurzeln oder der Koeffizient von $-i\beta^3$ in (10) konstant bleibt. Der Schlufs ist natürlich entsprechend zu modifizieren für den in der Praxis meist vorkommenden Fall aperiodisch gedämpfter Nebenschwingung.

Fragen wir endlich noch, wie die Periode der Kreiselpendelung, also v^2, zu wählen sei, damit die Dämpfung der Hauptschwingung bei festem k möglichst rasch mit n^2 zunimmt. Offenbar wird, ausgenommen den Fall $k=0$:

$$\frac{n^2 k}{(1-v^2)^2+k^2}$$

ein Maximum, wenn $v^2=1$ gewählt wird, also freie Kreiselpendelung und Schiffsschwingung in Resonanz standen (vgl. den Zusatz zu § 4, pag. 809). Solange die Nebenschwingung nicht in Betracht kommt, ist also, wenigstens bei hinreichend kleinen Werten von n^2, mit $v^2=1$ die günstigste Aufhängung des Kreisels gefunden.

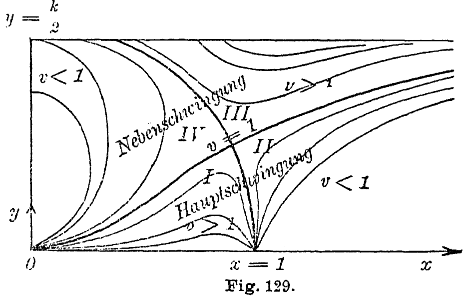


Fig. 129.

Nach dem Vorhergehenden bewegt sich bei kleinem n die Wurzel ζ_1 von 1 aus (Fig. 129) in der Richtung des wachsenden y und des wachsenden oder abnehmenden x, je nachdem $v^2 \lessgtr 1$. Wir suchen nun noch das Ende unserer Bewegungskurven, d. h. das Verhalten der Wurzeln für den Grenzwert des Eigenimpulses $n^2=\infty$.

Für einen solchen kann die Gl. (10) erfüllt sein durch ein Wurzelpaar $\beta^2 = 0$, wobei wir zunächst offen lassen, ob dieses Wurzelpaar zu der Hauptschwingung ξ oder der Nebenschwingung η gehört; als zweite Näherung erhält man dann:

$$\beta^2 = \frac{v^2}{n^2}.$$

Ein zweites mögliches Wurzelpaar ist $\beta^2 = \infty$. Für die zweite Näherung erhält man hier:

$$\beta^2 - ik\beta - (1 + v^2 + n^2) = 0,$$

also:

$$\beta = \frac{ik}{2} \pm \sqrt{-\frac{k^2}{4} + (1 + v^2 + n^2)}.$$

Wie im dämpfungsfreien Fall haben wir also für unendlich grofsen Eigenimpuls in erster Näherung die freien Frequenzen 0 und ∞. Die erste Schwingung ist auch in zweiter Näherung ungedämpft, die zweite hat die Dämpfungskonstante $k/2$ wie im Falle $n = 0$.

3. Verschiedene Möglichkeiten des Überganges von kleinem zu grofsem Impuls. Je nach den Verhältnissen ist es nun erstens möglich, dafs die ursprüngliche Schiffsschwingung bei wachsendem n schliefslich in die dämpfungsfreie mit der Frequenz 0 stetig übergeht. Dann würde die Dämpfung für einen gewissen Wert von n ein Maximum erreichen, über das man durch Vergröfserung des Impulses nicht mehr hinauskommen kann (vgl. die Kurven im Quadranten I der Fig. 129; in dieser ist k konstant zu denken, n variiert auf der einzelnen Kurve von 0 bis ∞, v wechselt von Kurve zu Kurve als Parameter der Schar). Es wäre aber auch möglich, dafs die Schiffsschwingung stetig in die unendlich rasche Schwingung übergeht, die dann die volle Dämpfung der Kreiselschwingung übernommen hätte, wie in den Kurven des Quadranten II der Fig. 129. Endlich ist es noch möglich, dafs von einem stetigen Übergang überhaupt nicht mehr gesprochen werden kann, wenn für einen gewissen Wert von n etwa die beiden Schwingungen in Dämpfung und Schwingungsdauer übereinstimmen und dabei ihre Rolle teilweise vertauschen, wobei eine Kurve derjenigen Art entsteht, die in Fig. 129 die Quadranten trennt. Dieser Fall tritt ein, wenn $v = 1$, also im Anfang die Frequenz der freien ungedämpften Kreiselpendelung mit der der Schiffsschwingung übereinstimmt, während die erste Möglichkeit durch $v > 1$, die zweite durch $v < 1$ realisiert wird, wie in der Figur angedeutet ist.

In Fig. 129 stellen die Kurven des III. und IV. Quadranten die zur Nebenschwingung gehörigen Wurzelwerte dar, und zwar so, dafs je die Kurven der Quadranten I und III bezw. II und IV zu gleichem v^2

gehören. Da k, wie hervorgehoben, für alle Kurven der Figur das gleiche ist, beginnen die Bewegungskurven der Nebenschwingungen sämtlich für $n = 0$ in Punkten der horizontalen Geraden $y = k/2$, und zwar an Stellen, die von v abhängen; nur bei kleinem v, wenn die ursprüngliche Kreiselpendelung aperiodisch war, setzt die Kurve auf der imaginären Axe ein. Wegen der Bedeutung von v im aperiodischen Falle, wo wir nicht mehr vom Verhältnis der Schwingungszahlen schlechtweg sprechen können, vgl. die Anm. zu pag. 804.

Da gerade von diesen verschiedenen Möglichkeiten des Überganges, wie leicht ersichtlich, der Grad der für die Schiffsschwingung erreichbaren Dämpfung abhängt, und damit die Günstigkeit der ganzen Anordnung, so wollen wir sie im Folgenden näher untersuchen, wobei wir den genauen Beweis für die vorangestellten Behauptungen nachtragen werden. Bezüglich der zu wählenden Impulsstärke können wir ein Resultat schon jetzt feststellen: Haben wir einen Verlauf der Wurzeln wie im I. Quadranten, so erreicht die Dämpfung der Schiffsschwingung für einen gewissen Wert von n^2 ein Maximum, und es wird daher hinsichtlich der Dämpfung schädlich, den Impuls über diesen Wert hinaus zu vergröſsern. Haben wir dagegen eine Kurve im II. Quadranten, so kann die Schiffsschwingung bei genügend gesteigerter Impulsstärke die volle Dämpfung k der Kreiselpendelung übernehmen, und es ist daher zu erwarten, daſs die Dämpfung hier anfangs viel rascher mit wachsendem n^2 anwächst als im ersten Fall. Für gröſseres n^2 aber wird, wie ein Blick auf Fig. 129 zeigt, die Dämpfung nur noch langsam wachsen; dagegen ist es hier unerwünscht, daſs die Frequenz der Schiffsschwingung ebenfalls beständig zunimmt. Somit wird es auch hier eine obere Grenze für den Impuls geben, über die hinaus eine weitere Steigerung hinsichtlich der Dämpfung zwecklos, hinsichtlich der Frequenz schädlich wird. Daſs aber günstige mittlere Werte bestehen, bestätigt die numerische Berechnung in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

4. Quantitative Bestimmung der Wurzeln bei beliebigem Impuls. Differentialgesetz für die Wurzelbewegung. Wir untersuchen nun diese Verhältnisse durch Weiterführung der für $n^2 = 0$ und $n^2 = \infty$ verwandten Näherungsmethode.

Die Gl. (10) lautet ausgeschrieben:

$$\beta^4 - i\,(k + K)\,\beta^3 - (1 + v^2 + kK + n^2)\,\beta^2 + i\,(Kv^2 + k)\,\beta + v^2 = 0.$$

Aus den Koeffizienten dieser Gleichung folgen für die Wurzeln folgende Beziehungen, denen wir gleich eine geeignete Form geben:

$$(20)\quad \begin{cases} (\zeta_1+\zeta_2)+(\eta_1+\eta_2)=i(k+K) \\ \zeta_1\zeta_2+\eta_1\eta_2+(\zeta_1+\zeta_2)(\eta_1+\eta_2)=-(1+v^2+kK+n^2) \\ \zeta_1\zeta_2\cdot(\eta_1+\eta_2)+\eta_1\eta_2\cdot(\zeta_1+\zeta_2)=-i(Kv^2+k) \\ \zeta_1\zeta_2\cdot\eta_1\eta_2=v^2. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Realitätsverhältnisse setzen wir für Produkt und Summe:

$$(21)\quad \begin{cases} \zeta_1\zeta_2=-p; & \eta_1\eta_2=-\pi; \\ \zeta_1+\zeta_2=+is; & \eta_1+\eta_2=+i\sigma. \end{cases}$$

Hier bedeutet s bezw. σ den Dämpfungsfaktor, $\sqrt{p}$ bezw. $\sqrt{\pi}$ die augenblickliche „dämpfungsfreie“ Frequenz der beiden Schwingungen, d. h. diejenige Frequenz, die für $s=0$ bezw. $\sigma=0$ vorhanden wäre.

Aus den obigen Gleichungen folgt dann durch Differentiation nach n^2, da n^2 nur im Koeffizienten von β^2 vorkommt (die Striche bezeichnen die Differentiation nach n^2):

$$\begin{aligned} s'+\sigma' &= 0 \\ \sigma s'+s\sigma'+p'+\pi' &= 1 \\ \pi s'+p\sigma'+\sigma p'+s\pi' &= 0 \\ \pi p'+p\pi' &= 0. \end{aligned}$$

Endlich liefert die Auflösung dieser linearen Gleichungen für die Differentialquotienten, wenn Δ die Determinante des Systems bezeichnet, folgende Formeln:

$$(22)\quad \begin{cases} \Delta\cdot s'=-p\sigma+\pi s \\ \Delta\cdot\sigma'=+p\sigma-\pi s \\ \Delta\cdot p'=p(\pi-p) \\ \Delta\cdot\pi'=\pi(p-\pi) \end{cases}$$

Dabei ist

$$(23)\quad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma & s & 1 & 1 \\ \pi & p & \sigma & s \\ 0 & 0 & \pi & p \end{vmatrix}$$

$$=-(p-\pi)^2+(s-\sigma)(p\sigma-\pi s).$$

oder, wenn wir aus (21) einsetzen:

$$\begin{aligned} \Delta &= -(\zeta_1\zeta_2-\eta_1\eta_2)^2+[(\zeta_1+\zeta_2)-(\eta_1+\eta_2)][\zeta_1\zeta_2(\eta_1+\eta_2)-\eta_1\eta_2(\zeta_1+\zeta_2)] \\ &= -(\zeta_1-\eta_1)(\zeta_1-\eta_2)(\zeta_2-\eta_1)(\zeta_2-\eta_2). \end{aligned}$$

Die Determinante verschwindet also nur dann, wenn eine Wurzel des Paares $\zeta_1\zeta_2$ mit einer des Paares $\eta_1\eta_2$ zusammenfällt. Solange

dieser Fall nicht eintritt, behält sie ihr ursprüngliches Vorzeichen bei Abänderung von n^2 ständig bei. Nur in jenem Ausnahmefall kann die Änderung der Gröfsen p, π, s, σ mit n^2 unstetig werden, andernfalls findet ihre Änderung mit stetigem Fortschreitungssinne statt.

Die Formeln (22) gestatten nun, mit Rücksicht auf diese Bemerkung, die Bewegungskurven der Wurzeln bei variablem n^2 zu diskutieren. Für ihre wirkliche Berechnung werden wir n^2 von 0 ausgehend, um kleine Werte $\delta(n^2)$ wachsen lassen und die Änderungen von p, π, s, σ für diese Intervalle als linear betrachten, nach dem Beispiel der „mechanischen Quadratur". Man erhält in dieser Art jedenfalls in viel rascherer und übersichtlicherer Weise die Wurzeln für eine kontinuierliche Reihe von Werten des Impulses n^2, als durch direkte, numerische Lösung der Gleichung vierten Grades.

Die Gleichungen (22) liefern zunächst nur die reellen Gröfsen p, π, s, σ. Man geht von ihnen aus zu den Wurzeln selbst über durch Auflösung der quadratischen Gleichungen für diese Paare:

$$\zeta^2 - is\zeta - p = 0$$

$$\eta^2 - i\sigma\eta - \pi = 0,$$

also

$$(24)\qquad \begin{aligned} \zeta_1, \zeta_2 &= +i\frac{s}{2} \pm \sqrt{-\frac{s^2}{4} + p} \\ \eta_1, \eta_2 &= +i\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{-\frac{\sigma^2}{4} + \pi}. \end{aligned}$$

Für den Ausgangswert $n^2 = 0$ haben die Gröfsen (21) die Werte:

$$(25)\qquad p = 1; \quad \pi = v^2; \quad s = K; \quad \sigma = k,$$

so dafs wegen der Kleinheit von K annähernd wird:

$$(25\,a)\qquad \Delta = -(1 - v^2)^2 - k^2.$$

Hier sind p und π positiv und bleiben auch bei wachsendem n^2 positiv, da nach (20) und (21) ihr Produkt den unveränderlichen Wert v^2 hat. Die Determinante Δ ist nach (25 a) für $n^2 = 0$ sicher negativ, bleibt also negativ, solange nicht eine Wurzel des Paares ζ mit einer des Paares η zusammenfällt. Wir werden zunächst, wie in Fig. 129, annehmen, dafs die Koppelung nicht ausreicht, um die Schiffsschwingung aperiodisch zu machen. Dann ist mindestens eines der Wurzelpaare ein konjugiertes Paar, und ein Zusammenfallen kann daher nur eintreten, wenn die beiden Paare vollständig zusammenfallen, also $p = \pi$, $s = \sigma$ ist. Tritt dieser Fall nicht ein, so bleibt die Determinante Δ immer negativ.

Wie wir endlich noch bemerken, läfst sich aus den Gleichungen (22) leicht zeigen, dafs die Gröfsen s und σ nie negativ werden, die beiden Schwingungen also nicht zeitlich anwachsen können, und daher die Methode der kleinen Schwingungen wirklich anwendbar bleibt. Denn es ist für keinen endlichen Wert von n^2 möglich, dafs p oder π zu 0 bezw. ∞ werden, da die Gleichung (10) nur für unendlich grofses n^2 verschwindende oder unendlich grofse Wurzeln haben kann. s und σ waren nun für kleines n^2 positiv, dann folgt aber aus den Gleichungen (22) wegen des negativen Wertes von Δ, dafs s sowohl als σ immer anwachsen würden, wenn sie einmal sehr klein geworden wären. Daher ist es für keinen endlichen positiven Wert von n^2 möglich, dafs eine der Gröfsen s oder σ verschwindet und weiterhin negativ wird. Bei diesem Beweise ist stillschweigend vorausgesetzt, dafs Δ nicht verschwindet; dieser Ausnahmefall, von dem bereits soeben die Rede war, tritt für $v^2 = 1$ ein und wird in Nr. 6 besonders behandelt.

5. Allgemeiner Verlauf der Wurzelbewegung bei $v^2 \gtrless 1$. Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen ist der Verlauf der Kurven (Fig. 129) leicht zu diskutieren. Dabei ist zu beachten, dafs in dieser und den folgenden Figuren die Abscisse x nicht die Gröfse p bezw. π selbst vorstellt, sondern die Frequenzen $\sqrt{p^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$, bezw. $\sqrt{\pi^2 - \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}$, die aber ähnlichen Verlauf wie p bezw. π selbst haben.*) Die Gleichungen (22) legen es nahe, zu unterscheiden, ob zu Anfang $\pi - p \gtreqless 0$ war, d. i. nach (25):

$$v^2 \gtreqless 1.$$

Sei zunächst

$$v^2 > 1,$$

also die Kreiselpendelung rascher als die ursprüngliche Schiffsschwingung.

Aus den Formeln (22) folgt dann, dafs, solange Δ negativ ist, p' negativ, π' positiv wird, p nimmt also von dem Wert 1 aus ab, π von dem Anfangswerte $v^2 > 1$ aus zu, so dafs nicht $p = \pi$ werden kann. Also kann die Determinante Δ nicht verschwinden und daher nimmt p beständig weiter ab, π beständig zu. Dann mufs schliefslich (nach Fig. 129) für grofses n^2 die Hauptschwingung in die ungedämpfte Schwingung mit der Frequenz 0, die Nebenschwingung in die gedämpfte mit der Frequenz ∞ übergehen. Der Fall $v^2 > 1$ entspricht also, wie

*) Entsprechend dem in der Praxis vorliegenden Fall ist in den Figuren 130 und 131 die freie Kreiselpendelung als aperiodisch gedämpft angenommen, die beiden Wurzeln η liegen dann bei kleinem n^2 auf der imaginären Axe. Nur in Fig. 129 sind der gröfseren Deutlichkeit halber auch periodische Fälle der Nebenschwingung gezeichnet.

früher bereits ohne Beweis angegeben, der ersten der auf S. 820 unter Nr. 3 besprochenen Möglichkeiten, die zugehörigen Kurven liegen im I. und III. Quadranten. *Die Dämpfung der Hauptschwingung muß für einen Wert von n^2 ein Maximum erreichen, dann wieder abnehmen.* Die Formeln (22) bestätigen dieses Verhalten, denn in der Gleichung für s' überwiegt für genügend grofses n^2 das Glied mit dem beständig anwachsenden Faktor π, so dafs, wegen des negativen Wertes von Δ, schliefslich s' wieder negativ werden mufs. Die Dämpfung σ der Nebenschwingung, die durch Punkte im III. Quadranten dargestellt ist, erreicht damit gleichzeitig einen Minimalwert und wächst dann wieder zu ihrem ursprünglichen Wert $\sigma = k$ an.

Im Fall
$$v^2 < 1,$$
d. h. wenn die Kreiselpendelung langsamer war als die Schiffsschwingung, folgt aus (22), analog dem Fall $v^2 > 1$, dafs p beständig vom Wert 1 ab weiter zunimmt, dagegen π, von $v^2 < 1$ beginnend, beständig abnimmt. Daher geht jetzt (nach Fig. 129) für grofses n^2 die Hauptschwingung in die Schwingung mit unendlich grofser Frequenz über, die aber jetzt die volle Dämpfung k übernommen hat, die Nebenschwingung nähert sich der dämpfungsfreien mit der Frequenz 0. Wie oben schon behauptet, entspricht also der Fall $v^2 < 1$ der zweiten der auf pag. 820 genannten Möglichkeiten, und es gelten bei dieser Anordnung die dort gemachten Bemerkungen. Die Formeln (22) bestätigen, dafs in dem Ausdruck für s' jetzt immer das Glied mit der beständig anwachsenden Gröfse p überwiegt, also s immer zunimmt.

Thatsächlich kommt natürlich nur ein kleiner Teil der so beschriebenen Kurven in Betracht, da ja die Gröfse von n^2 schon durch technische Schwierigkeiten begrenzt ist. Jedenfalls aber wird nach der obigen Diskussion eine gröfsere Dämpfung der Hauptschwingung zu erreichen sein, wenn die Konstruktion des Kreisels so gewählt wird, dafs er ohne Rotation langsamer schwingt als das Schiff. Allerdings wird dann zugleich die „dämpfungsfreie“ Frequenz der Hauptschwingung (p) erhöht, was schliefslich auch zu einer unerwünschten Erhöhung der wirklichen Frequenz $x = \sqrt{p^2 - \frac{s^2}{4}}$ führen muß, während für mittlere Werte von n die wirkliche Frequenz wegen der wachsenden Dämpfung doch abnehmen kann. Andererseits ist es vorteilhaft, dafs die in der Praxis immer aperiodisch zu wählende Nebenschwingung für gröfsere Werte des Impulses aperiodisch bleibt, während im Fall $v^2 > 1$ die Nebenschwingung viel früher periodisch wird. Erst für grofses n^2 wird die Nebenschwingung auch im Fall $v^2 < 1$ periodisch, aber von sehr langer Periode. Die numerischen Rechnungen bestätigen die obigen

Schlufsfolgerungen, *die es als günstig erscheinen lassen, den Kreisel möglichst langsam, jedenfalls nicht schneller als das Schiff, pendeln zu lassen.* Doch mufs er immerhin noch ein genügendes Schweremoment besitzen, um trotz der Reibung nach Aufhören von Rollbewegungen selbsttätig in die vertikale Gleichgewichtslage zurückzukehren.

6. Spezielle Behandlung des Falles $v^2 = 1$.*) Wir haben endlich noch den Resonanzfall, $v^2 = 1$, zu behandeln, in dem zu Anfang sicher $p = \pi = 1$ ist. Aus den Gleichungen (22) folgt dann aber, dafs zunächst dauernd bei wachsendem n^2

(26 a) $$p = \pi = 1$$

bleibt.

Denn Δ kann nicht verschwinden, solange nicht die beiden Wurzelpaare vollständig identisch sind, also auch $s = \sigma$ geworden ist. Die Gleichungen (22) vereinfachen sich mit $p = \pi = 1$ zu:

$$s' = \frac{1}{\sigma - s}; \quad \sigma' = \frac{1}{s - \sigma}.$$

Daraus folgt, dafs s zunimmt, σ abnimmt, bis $s = \sigma$ geworden ist. Durch Subtraktion dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{d(s - \sigma)}{d(n^2)} = \frac{-2}{s - \sigma},$$

also

$$(s - \sigma)^2 = -4n^2 + \text{const.},$$

wo const. aus dem Falle $n = 0$ sich nach (25) zu k^2 ergiebt, wenn $K = 0$ angenommen wird.

Es ist also

$$s - \sigma = -\sqrt{-4n^2 + k^2}.$$

Ferner nach Gleichung (10):

$$s + \sigma = k.$$

Also:

(26 b) $$\begin{cases} s = \frac{1}{2}\left(k - \sqrt{k^2 - 4n^2}\right) \\ \sigma = \frac{1}{2}\left(k + \sqrt{k^2 - 4n^2}\right) \end{cases}.$$

Hiernach ergiebt sich $s = \sigma$ für den Wert $n^2 = \frac{k^2}{4}$, für den also wegen (26a) die beiden Wurzelpaare identisch werden.

Die Gleichung vierten Grades (10) ist im Falle $v^2 = 1$ durch blofse Quadratwurzeln lösbar.

---

*) Die pag. 808 zitierte Behandlung des Problems von A. Föppl beschränkt sich auf diesen mathematisch etwas leichter zugänglichen Sonderfall.

Ihre vollständige Lösung lautet nach dem Schema (24), pag. 823, wegen (26 a) und (26 b):

$$(27)\quad \begin{cases} \zeta_1, \zeta_2 = \frac{i}{4}\left(k - \sqrt{k^2 - 4n^2}\right) \pm \sqrt{1 - \frac{1}{16}\left(k - \sqrt{k^2 - 4n^2}\right)^2} \\ \eta_1, \eta_2 = \frac{i}{4}\left(k + \sqrt{k^2 - 4n^2}\right) \pm \sqrt{1 - \frac{1}{16}\left(k + \sqrt{k^2 - 4n^2}\right)^2}. \end{cases}$$

Bei weiterer Vergrößserung von n^2 würden unsere Werte s und σ selbst imaginär werden. Es werden dann zwei andere Paare der Wurzeln zu konjugierten Paaren, und diese gehen schliefslich wie in den Fällen $v^2 \gtrless 1$, in die Grenzwerte 0 und ∞ über, wie auch aus den obigen Gleichungen (27) zu ersehen ist. Von einem stetigen Übergang der Schiffsschwingung oder Kreiselschwingung in eine der schliefslich erreichten Schwingungen kann dann aber nicht mehr gesprochen werden.

Nach dem Vorhergehenden teilt die Kurve für den Fall $v^2 = 1$ die Zeichenebene in 4 Quadranten, in die sich die beiden Kurvensysteme für die Werte $v^2 \gtrless 1$, wie in Fig. 129, einzuordnen haben, und zwar ohne dafs sich dabei zwei Kurven schneiden. Denn da die linke Seite der Gl. (10) die Parameter v^2 und n^2 linear enthält, so sind durch Vorgabe eines Wurzelpaares diese Parameter eindeutig bestimmt, so dafs im allgemeinen nur eine Kurve durch einen Punkt der Ebene hindurchgehen kann.

Damit dürfte ein allgemeiner Überblick gewonnen sein über das Verhalten der Wurzeln für veränderliches n^2. Der zuletzt behandelte Fall $v^2 = 1$ hatte sich früher (pag. 819) als die Anordnung ergeben, durch die, wenigstens bei kleinem Impuls, die stärkste Dämpfung der Hauptschwingung durch eine vorgegebene Kreiselstärke erreicht wird. Auch bei gröfseren Impulswerten bleibt $v^2 = 1$ in der Hinsicht die günstigste Form. Denn bezeichnen die Striche jetzt die Differentiation nach v^2, bei festgehaltenem n^2 und k (nicht wie vorher nach n^2, bei festgehaltenem v^2 und k), so folgt aus den Gleichungen (20) und (21):

$$\begin{aligned} s' + \sigma' &= 0 \\ \pi s' + p\sigma' + \sigma p' + s\pi' &= 0 \\ \pi p' + p\pi' &= 1 \\ \sigma s' + s\sigma' + p' + \pi' &= 1. \end{aligned}$$

Für den Resonanzfall, in dem nach (26 a) $p = \pi = 1$, wenigstens solange $n^2 < k^2/4$, folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \sigma s' + s\sigma' &= 0, \\ s' + \sigma' &= 0, \end{aligned}$$

also: $$s' = 0;\ \sigma' = 0.$$

Bei vorgegebenem n^2 haben demnach beide Dämpfungen im Resonanzfall ein Extremum, nämlich, wie sich in bekannter Weise zeigen läſst und schon bei kleinem n^2 gefunden wurde, ein Maximum bei der Hauptschwingung, was erwünscht ist, ein Minimum bei der Nebenschwingung, was unerwünscht ist, umso unerwünschter, als im vorliegenden Resonanzfalle auch die Amplitude der Nebenschwingung verhältnismäſsig groſs werden muſs.

Käme es nur auf die Dämpfung der Hauptschwingung an, so wäre also die Wahl $v^2 = 1$ die günstigste Anordnung. Zu beachten ist aber dann, daſs die Nebenschwingung entsprechend rasch an Dämpfung verliert und wegen ihrer verhältnismäſsig starken Amplitude auch merkbar werden kann, während für kleinere Werte von v^2 die Nebenschwingung wegen ihrer geringen Frequenz noch viel länger aperiodisch oder langsam periodisch bleibt und sicher nicht störend in Betracht kommt.

7. Möglichkeit aperiodischen Abklingens der Hauptschwingung. Wir haben uns bisher auf den Fall beschränkt, daſs die Schiffschwingung nicht aperiodisch gedämpft wird. Wie aber unsere folgenden numerischen Rechnungen zeigen werden, ist unter den in der Praxis vorkommenden Verhältnissen diese Beschränkung durchaus nicht notwendig, wenigstens nicht bei der Anordnung $v^2 < 1$.

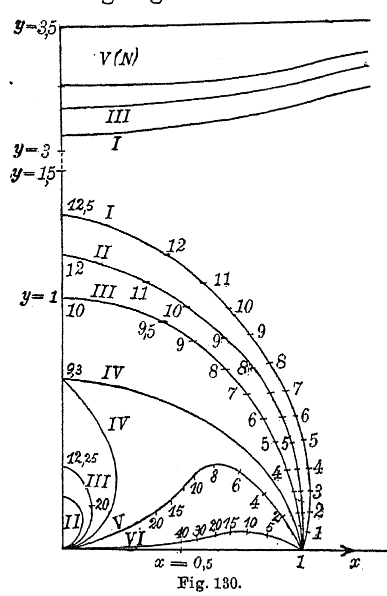


Fig. 130.

Auf Kurve	I	II	III	IV	V	VI
ist $v^2 =$	0	0,25	1	1,5	4	20

(N) = Nebenschwingung.

Die Ziffern bezeichnen die Werte von n^2. Die Punkte sind nach der Methode von Nr. 4 für $k = 7$ berechnet.

Das Kurvenbild, das sich dann im Gegensatz zu Fig. 129 ergiebt, ist in Fig. 130 dargestellt. k ist wie in Fig. 129 konstant, aber gröſser zu denken wie dort. Auf der einzelnen Kurve variiert n, von Kurve zu Kurve v. Bei nicht zu groſsem v (vgl. I bis IV in der Figur) steigen die Kurven von ihrem gemeinsamen Ausgangspunkte auf der x-Axe an, bis sie die y-Axe erreichen. Die Hauptschwingung ist dann aperiodisch geworden. Sind beide Schwingungen aperiodisch, also die vier Wurzeln von (10) rein imaginär, so kann von einer Unterscheidung der Haupt- und Nebenschwingung nicht mehr gesprochen werden, da die Trennung der Wurzeln in zwei Paare wegfällt. Für sehr groſses n^2 dagegen müssen

die Schwingungen wieder periodisch werden, da für $n^2 = \infty$ immer nur die zwei periodischen Schwingungen mit der Frequenz 0 und ∞ bleiben. Dabei geht die Dämpfung der raschen Schwingung nicht über den Wert k hinaus, die der langsameren Schwingung nach Null. Dementsprechend sehen wir in Fig. 130 z. B. aus der Kurve III bei zunehmendem n einen oberen und einen in der Nähe des Nullpunktes gelegenen unteren Ast sich entwickeln, die beide durch Teile der imaginären y-Axe mit dem ursprünglichen Kurvenaste III verbunden zu denken sind.

Dafs die Aperiodizität nur für mittlere Werte von n^2 eintritt, stimmt mit unseren früheren Bemerkungen überein, dafs es immer eine obere Grenze des Impulses giebt, über die hinaus ihn zu vergröfsern zwecklos, teilweise sogar schädlich ist. Das Aperiodizitätsgebiet erlaubt uns, die Grenzen einigermafsen quantitativ zu diskutieren, in denen die Impulsstärke womöglich zu halten ist.

8. Günstige Grenzen für Impulsstärke und Bremsstärke. Während in Fig. 129 und 130 k konstant, n und v variabel war, ist in Fig. 131 v konstant; n variiert auf der einzelnen Kurve, k von Kurve zu Kurve. Und zwar haben wir $v^2 = 1$ gewählt, in welchem Fall sich die Kurven am leichtesten numerisch berechnen lassen. Die den Marken beigefügten Zahlen bedeuten die Werte von n^2; die Berechnung der Punkte ist nach den Formeln der Nr. 6 ausgeführt. Dafs die Kurven hier, ähnlich wie die Kurve für $v^2 = 1$ in Fig. 129, eine Richtungsunstetigkeit haben, wenn Haupt- und Nebenschwingungen zusammenfallen, ist unwesentlich. Im Allgemeinen das gleiche Bild würde sich für einen anderen Wert von v^2 ergeben, nur würden die Kurven in der Umgebung der Knickstellen unserer Figur stetig bleiben, wie die Kurven für $v^2 \neq 1$ in Fig. 129. Ebenso ist es unwesentlich, und nur durch die spezielle Wahl $v^2 = 1$ bedingt, dafs die Wurzeln sich anfänglich für alle Werte von k auf demselben Kreise bewegen

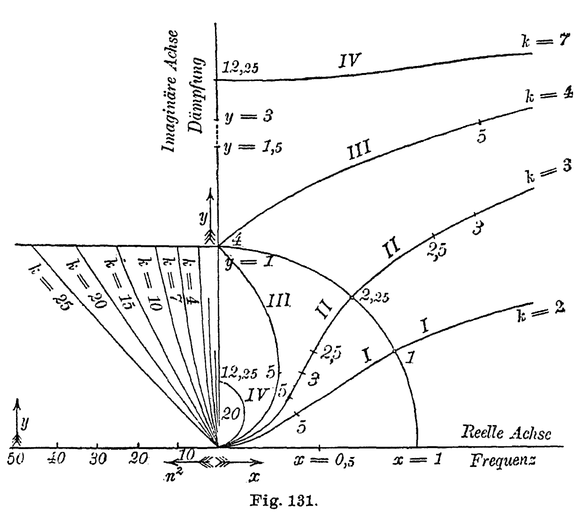


Fig. 131.

(weil hier das Produkt der zwei konjugiert reellen Wurzeln $\zeta_1 \zeta_2 = (x + iy)(-x + iy) = -1$ ist).

Die Kurve I der Fig. 131 giebt den Verlauf der Wurzeln für den kleinen Wert $k = 2$. Hier geht für $n^2 = 0$ die zur Nebenschwingung gehörige Wurzel η von dem Werte $+i$ aus, sie steht auf der Grenze zwischen Periodizität und Aperiodizität und bewegt sich mit wachsendem n^2 auf dem Kreise $x^2 + y^2 = 1$. Die zur Hauptschwingung gehörige, ζ, geht vom Punkte ± 1 aus (in der Figur ist nur die Wurzel mit positiv reellem Teil gezeichnet) und bewegt sich auf dem nämlichen Kreise nach aufwärts. Nach den Gleichungen (26), S. 826 fallen die beiden Wurzelpaare zusammen, wenn

$$n^2 = \frac{k^2}{4} = 1$$

geworden ist. Für gröfseres n^2 wird s und σ imaginär; dann ist aus den Gleichungen (27) ersichtlich, dafs keine der 4 Wurzeln (ausgenommen die Grenze $n = \infty$) rein imaginär sein kann, die Schwingungen also nicht aperiodisch sein können. Das Gleiche gilt noch für die Kurve II, $k = 3$, nur ist hier anfangs die Nebenschwingung aperiodisch, sie wird aber periodisch für $n^2 = 2$. Für $n^2 = 2{,}25$ fallen die beiden Paare zusammen und bleiben dann beide periodisch.

Für die Kurve III ist $k = 4$ gewählt. Hier wächst die Dämpfung s bis zu 2 an, und die Hauptschwingung erreicht damit gerade die Grenze zwischen Periodizität und Aperiodizität mit dem Wert $n^2 = 4$. Für denselben Wert aber fallen hier Haupt- und Nebenschwingung zusammen und werden dann mit wachsendem n^2 wieder periodisch, so dafs sich die Frequenzen schliefslich den Werten 0 und ∞ nähern.

Wir fassen zusammen:

Für kleine Werte der Dämpfung k, in unserem Falle $v^2 = 1$ für $k < 4$, ist es nicht möglich, den Impuls so zu wählen, dafs auch die Hauptschwingung aperiodisch wird. Für alle Werte $k > 4$ dagegen durchläuft die Wurzel ζ den ganzen Kreisquadranten, und die Schwingung wird aperiodisch, ehe die Paare zusammengefallen sind, und zwar nach (27), wenn $16 - (k - \sqrt{k^2 - 4n^2})^2 = 0$ wird. Dem entspricht der positive Wert $n^2 = 2k - 4$. Für alle Impulsstärken $n^2 > k^2/4$ aber werden beide Schwingungen wieder periodisch, und es ist daher sicher zwecklos, den Impuls über diese Grenze zu steigern.

Um auch für die Punkte des Kreisquadranten die Abhängigkeit der Dämpfung vom Impuls n^2 zu zeigen, haben wir links von der imaginären Achse die Kurven

$$\frac{s}{2} = f(n^2)$$

aufgetragen, also den imaginären Teil von ζ als Funktion von n^2, und zwar für verschiedene Werte der Dämpfung k. Die Ziffern an der horizontalen Axe bezeichnen die Werte von n^2. Aus den Kurven ist zu ersehen, dafs für *genügend grofses k, im Fall $v^2 = 1$ für $k > 4$, die Schwingung immer aperiodisch werden kann, dafs aber die hierzu erforderliche Kreiselstärke um so gröfser ausfällt, je gröfser die Dämpfung k ist.*

Einschaltungsweise sei hier bemerkt, dafs bei dem für die „Silvana" konstruierten Kreisel und den Gröfsenverhältnissen dieses Schiffes n^2 nicht beträchtlich über 20 gesteigert werden kann. Die Kurven zeigen, dafs dann k nicht gröfser als 10 sein darf, damit noch Aperiodizität der Hauptschwingung möglich wird; dem entspräche eine Bremsstärke $w = 1000$ mkgsec.

Die im Vorhergehenden beschriebenen Verhältnisse für $v^2 = 1$ geben ein genügendes Bild auch für die entsprechenden Verhältnisse bei anderen Werten*) von v^2. Die Wirkung der Bremse, wie sie sich im Vorhergehenden ergab, läfst sich daher folgendermafsen verallgemeinern:

Der Dämpfungsfaktor der Hauptschwingung, s, wächst mit n^2 an, bei kleinem k rasch, aber je gröfser k ist, desto langsamer (vgl. den linken Teil der Fig. 131), *kann aber nie über den Wert k selbst hinausgehen. Ist er in die Nähe dieses Wertes gekommen, so wächst er nur noch langsam, um sich asymptotisch dem Grenzwert k zu nähern* (vgl. den rechten Teil der Fig. 131). *Es können also im Ganzen gröfsere Werte von s bei gröfserem k erreicht werden, aber nur unter der Voraussetzung, dafs man den Impuls beliebig steigern kann.*

Wegen der tatsächlichen Grenze für die Impulsstärke wird aber für die Praxis gerade die Frage in Betracht kommen, wie bei festem n^2 die Gröfse k zu wählen sei, damit möglichst günstige Wirkung erzielt wird. Nach den vorhergehenden Überlegungen existiert immer ein solcher günstiger Bremswert. Nehmen wir nämlich einen grofsen Wert von k, so liegt der dem festen Wert n^2 entsprechende Punkt auf dem anfänglichen steilen Anstieg der betreffenden Kurve (nämlich im Falle der Fig. 131 auf dem Kreisbogen), und zwar um so höher, je kleiner k ist; wählen wir dagegen einen kleinen Wert k, so liegt er auf einem

*) Da wir den Fall $v^2 > 1$ als ungünstig ausgeschlossen haben, bildet $v^2 = 1$ die obere, $v^2 = 0$ die untere Grenze für v. Im letzteren Falle lassen sich analytisch (durch Bildung der Diskriminante von Gl. (10)) die analogen Resultate ableiten. Z. B. ergiebt sich hier als günstigste Bremsstärke bei gegebenem n statt (28) auf pag. 832 ungefähr

$$k^2 = 3(n^2 + 1) \tag{28'}$$

Durch diese Festsetzung kann Aperiodizität der Hauptschwingung erreicht werden, wenn $n^2 > 8$ gewählt ist.

der anschliefsenden Kurvenäste mit nurmehr geringem Anstieg (nämlich im Falle der Fig. 131 auf einem der vom Kreise nach rechts abzweigenden Bögen), also (vgl. Fig. 131) um so höher, je größer k ist. Wir werden die günstigste Wirkung erhalten, wenn wir k so bestimmen, dafs der Punkt n^2 gerade auf dem Übergangsbogen zwischen beiden Gebieten der betr. Kurve liegt. Für den speziellen Fall unserer Fig. 131 ($v^2 = 1$) zieht sich dieser Übergangsbogen in den Verzweigungspunkt mit dem Parameterwert $n^2 = k^2/4$ zusammen. *Wir erhalten also* umgekehrt *bei festem n^2 und für $v^2 = 1$:*

$$k^2 = 4n^2 \tag{28}$$

als günstigste Bremsstärke.

8. Zahlenbeispiel für „Silvana". Um einen Anhalt für die in der Praxis in Betracht kommenden Gröfsen der Werte v^2, k^2, n^2 zu gewinnen, halten wir uns an das Beispiel des Kreisels in der „Silvana", der schon am Anfang des vorigen Paragraphen erwähnt war.

Die Verhältnisse bei der „Silvana" sind die folgenden:

Wasserverdrängung (Q):	850000 kg
Metacentrische Höhe (H):	0,4 m
Freie Periode der Rollbewegungen $\left(\frac{2\pi}{\alpha_0}\right)$:	8 sec.

Daraus ergiebt sich das

Trägheitsmoment (J):	550000 mkgsec².

Die Abmessungen des Kreisels waren annähernd:

Gewicht von Kreiselrad und Welle (q):	6000 kg
Trägheitsmoment der rotierenden Massen (Θ):	175 mkgsec²,
Winkelgeschwindigkeit des Kreiselrades (ω):	189 sec⁻¹,
Trägheitsmoment um die Queraxe (j) geschätzt zu etwa:	150 mkgsec².

Daraus ergiebt sich zunächst für unseren Parameter n^2:

$$n^2 = \frac{N^2}{Jj\alpha_0^2} = \frac{N^2}{jQH} = \frac{175^2 \cdot 189^2}{150 \cdot 85 \cdot 4 \cdot 10^3} = 21.$$

Das Frequenzverhältnis v konnte wegen starker Dämpfung durch den Versuch nicht bestimmt werden. Wir dürfen aber nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Otto Schlick $v < 1$ annehmen.

Über die Bremsstärken sind nähere Angaben unbekannt, doch ist jedenfalls die freie Kreiselpendelung durch die Lagerreibung aperiodisch gedämpft, wie wir ebenfalls von Herrn Schlick erfahren. Hieraus folgt zunächst $k \geqq 2$ im Falle $v \leqq 1$, da nach der Grundgleichung (2) in bekannter Weise $\sqrt{v^2 - k^2/4}$ der Frequenz der Kreiselpendelung proportional ist. Bei hinzutretender Bremse mufs umsomehr $k > 2$ sein. Formel (28) bezw. (28′) würde als günstigsten Wert $k = 9$ bezw. $k = 8$

ergeben. Für das Folgende wollen wir $k = 7$ annehmen. Die frühere Fig. 130 ist, wie daselbst bemerkt, für diesen Wert von k nach der Methode von Nr. 4 berechnet, darin sind die schrittweise gefundenen Punkte mit den zugehörigen Werten von n eingetragen. Dem Wert $k = 7$ entspricht eine Bremsstärke $w = 700$ mkgsec.

Die Fig. 130 zeigt, daſs in diesem Fall für alle Werte $v^2 \leqq 1$ (Kurve I, II, III) für verhältnismäſsig kleine Werte von n^2 schon Aperiodizität der Hauptschwingung eintritt. (Die angeschriebenen Ziffern bezeichnen überall die dem betreffenden Punkte zugehörige Gröſse von n^2). Für den Wert $v^2 = 1{,}5$ (Kurve IV) kann die Schwingung, mit $n^2 = 9{,}3$, gerade die Grenze zwischen Periodizität und Aperiodizität erreichen, um bei gröſserem n^2 wieder periodisch zu werden. Für noch gröſseres v^2 (V, VI) erreicht die Dämpfung nur einen Maximalwert und nimmt wieder ab, ohne daſs die Schwingung aperiodisch wird.

§ 6. **Resultate und praktische Erfahrungen am Schiffskreisel.**

Wir wenden uns noch zu einer kurzen Besprechung der im letzten Paragraphen erhaltenen Resultate, insbesondere zu ihrem Vergleich mit den von Schlick selbst gewonnenen Erfahrungen bei seinen Versuchen mit dem „Seebär“ und der praktischen Ausführung der Kreiselkonstruktion bei der „Silvana“ und dem „Lochiel“.

Die wesentlichsten Ergebnisse sind, auſser in früheren Publikationen (vgl. pag. 808), in einem kürzlich erschienenen Vortrag*) von Schlick zusammengestellt. Herr Schlick hatte auch die Freundlichkeit, uns weitergehende Erfahrungen brieflich mitzuteilen.

Zunächst ist zu bedenken, daſs der Ansatz in § 4 in mehrfacher Hinsicht im Interesse der analytischen Ausführbarkeit einfacher gestaltet ist, als es der Wirklichkeit entspricht. Erstens geht er von der Annahme kleiner Schwingungen, und zwar des Schiffes und des Kreisels, aus. Was das Schiff betrifft, so sind in der That seine Schwingungen erfahrungsgemäſs, insbesondere nach Einschaltung des Kreisels, gering, d. h. die Ausschläge betragen im Höchstfall wenige Grade. Ohne Kreisel waren die Ausschläge bei der „Silvana“ bei stürmischem Wetter etwa 10—15°. Anders steht es mit den Ausschlägen des Kreiselrahmens, die ja, nach den Bemerkungen auf S. 803, beträchtlich gröſser sind als die des Schiffes, wie die Erfahrung durchaus bestätigt. Aus einem gleich zu besprechenden Grunde kommen hier Ausschläge bis zu 45° nach beiden Seiten in Betracht. Unter diesen Umständen

*) Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 1909.

mufs die Annahme kleiner Schwingungen die Wirkung des Kreisels *günstiger* erscheinen lassen, als es die strenge Rechnung ergeben würde. Denn wir nahmen bei Berechnung der etwa durch die Rollbewegung veranlafsten Kreiselwirkung, die den Kreisel zum Pendeln bringt, an, dafs die Kreiselaxe senkrecht auf der Längsaxe des Schiffes stände. Diese Kreiselwirkung nimmt aber ab, wenn der Kreisel ausschlägt, entsprechend der früheren Formel (II) in § 1, um ganz zu verschwinden, wenn sich die Axe um 90^0 gedreht hat, da sie dann der Axe der Rollbewegung gerade parallel wird. Wir haben also die Koppelung zwischen Schiff und Kreisel als zu stark angenommen, und damit mufs die Beinflussung der Rollbewegungen durch den Kreisel überhaupt sich zu grofs ergeben. Da indessen nur Ausschläge bis zu 45^0 vorkommen, und dieser Ausschlag erfahrungsgemäfs nur selten erreicht wird, wird die gemachte Überschätzung der Kreiselwirkungen keine beträchtliche sein. Thatsächlich ist es bekannt, dafs in vielen Fällen auch bei endlicher Amplitude die unter der Annahme kleiner Ausschläge gefundenen Resultate mit der Erfahrung durchaus übereinstimmen.*) Übrigens wäre eine strenge Berechnung wegen anderer unkontrollierbarer Vernachlässigungen hier offenbar nicht am Platze.

Gröfsere Ausschläge des Kreiselrahmens als bis zu 45^0 waren bei der praktischen Ausführung durch einen „Stopper" verhindert, der also zeitweise die Kreiselwirkung aufhebt

Eine weitere analytische Vereinfachung liegt in dem Ansatz der Kreiselbremsung $-k\frac{d\vartheta}{dt}$, der ein Inkrafttreten der Bremse erst bei Vorhandensein einer schwingenden Bewegung ausdrückt. Thatsächlich hat der Kreisel, abgesehen von der hydraulischen Bremse, auch bei Anwendung von Kugellagern, vermöge seines grofsen Gewichtes beträchtliche Lagerreibung, die bei kleinen Geschwindigkeiten die Gesetze der gleitenden, bezw. rollenden Reibung von festen Körpern aufeinander befolgt (Kap. VII, § 2). Nach diesen Gesetzen ist ein gewisses endliches Maximalmoment nötig, um den Rahmen schon von der Ruhe in die Bewegung überzuführen. Daher ist der Kreisel bei ruhendem Schiff nicht an die Gleichgewichtslage bei vertikaler Axe, d. h. bei möglichst tiefer Lage des Schwerpunkts, gebunden, sondern er kann im Gleichgewicht beharren bei einer Verlagerung gegen die Vertikale bis zu einem gewissen Winkel ϑ_0, der sich aus den Dimensionen des Kreisels und der Gröfse des „Lagerreibungskoeffizienten der Ruhe" ergiebt, und

*) Als allgemeinen Grund hierfür kann man anführen, dafs der Sinus mit dem Bogen, durch den er ersetzt wird, bis zu 20^0 in der zweiten, bis zu 45^0 in der ersten Dezimale übereinstimmt.

etwa als Reibungswinkel des Systems bezeichnet werden kann. Dieser Winkel ist beim Kreisel ein ziemlich beträchtlicher, wie sich aus Versuchen von Schlick, den Kreiselrahmen künstlich zum Schwingen zu bringen, ergiebt. Andererseits ist aber auch zu beachten, daſs der Ansatz $-k\frac{d\vartheta}{dt}$ für die hydraulische Bremse nur ein allgemeines Schema sein und nur das Wesentliche ausdrücken will, nämlich eine Bremskraft, die der augenblicklichen Bewegung immer entgegenwirkt. Die spezielle Form des Wirkungsgesetzes ist für den Effekt wohl ziemlich belanglos, wie ja derselbe Fehler schlieſslich auch, ohne sich zu rächen, bei vielen physikalischen Aufgaben begangen wird.

Eine andere Fehlerquelle aber, die bei der Behandlung aller technischen Probleme berücksichtigt werden muſs, insbesondere wenn es sich um so hohe Geschwindigkeiten handelt, wie im Falle des Schlickschen Kreisels, liegt in der elastischen Nachgiebigkeit des Materials. Die Richtung ihres Einflusses ist in diesem Falle zweifellos: eine weitere Abschwächung der berechneten Wirkung. Denn einerseits beruhen ja die Kreiselwirkungen selbst auf den inneren Reaktionen des als starr angenommenen Schwungringes, anderseits werden sie erst durch Vermittlung von Reaktionskräften vom Kreisel auf das als starr angenommene Schiff übertragen. Beide Arten von Reaktionen werden durch die, wenn auch geringe, elastische Nachgiebigkeit des Kreisel- und Schiffmaterials abgeschwächt, so daſs die Wirkung der Kreiselkoppelung überhaupt verringert werden muſs.

Wir wollen nun, auf Grund der Resultate des vorigen Paragraphen, die erforderliche Kreiselstärke zur Erzielung günstiger Wirkung abzuschätzen suchen, können aber, nach den vorangehenden kritischen Bemerkungen, natürlich nur einen ungefähren Anhaltspunkt erwarten.

Wir präcisieren die Frage dahin:

Wie groſs muſs der Kreiselimpuls gewählt werden, damit die Amplitude der erzwungenen Schwingung auf einen geeigneten Bruchteil ihres ursprünglichen Wertes (d. h. ohne Kreisel) reduziert werde. Dabei soll der Impuls und die Bremse k genügend stark sein, um die durch das Einsetzen erzwungener Schwingungen immer wieder angeregten freien Schwingungen rasch abzudämpfen.

Die Antwort ist aus den Überlegungen des § 5 zu entnehmen. Beschränken wir uns auf den wesentlich in Betracht kommenden Fall der Resonanz zwischen Welle und freier Schiffsschwingung, auf den sich auch die Versuche von Schlick beziehen, d. h. $\gamma = 1$, so wird das gesuchte Verhältnis nach Gl. (17) (pag. 810) und (18) (pag. 811) mit genügender Näherung:

$$\frac{|A_n|}{A_0|} = \frac{K\sqrt{k^2+(1-v^2)^2}}{n^2}.$$

Beachten wir ferner, daſs v^2 nach den Folgerungen auf pag. 825, kleiner oder höchstens gleich 1 sein sollte, ein Resultat, zu dem auch Schlick durch seine Versuche gekommen ist, so können wir angenähert setzen, indem wir den kleinen echten Bruch $(1 - v^2)^2$ neben der groſsen Zahl k^2 vernachlässigen:

$$\left|\frac{A_n}{A_0}\right| = \frac{Kk}{n^2}. \tag{29}$$

Einen angenäherten Wert von K können wir aus Versuchen entnehmen, die Schlick beim „Seebär" angestellt hat. Dort ergab sich (s. auch Fig. 133), daſs der Ausschlag des Schiffes ohne Kreisel bei ruhendem Wasser nach 20 Schwingungen auf etwa $\frac{1}{20}$ seines ursprünglichen Betrages zurückging. Dem entspricht der Wert

$$K = 0{,}05.$$

Die Gröſse k wird, nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen, günstig so zu wählen sein, daſs die freie Schiffsschwingung durch die Kreiselkoppelung aperiodisch gedämpft werden kann, und zwar schon für verhältnismäſsig kleine Werte des Impulses. Diesen Bedingungen genügt etwa der der Fig. 130 zu Grunde gelegte Wert $k = 7$. Mit Rücksicht auf die vorerwähnte Unbestimmtheit der Definition von k sei $k = 7$ bis 10 gewählt, oder die zugehörige Gröſse der Bremsstärke in dem Beispiel der Silvana (pag. 832) $w = kj\sqrt{QH/J}$ zu 700 bis 1000 mkgsec.

Nach pag. 830 würde zwar auch schon ein etwas kleinerer Wert ausreichen, um die Hauptschwingung aperiodisch zu machen, aber dann würde, wenigstens für $v = 1$, die Nebenschwingung nahe in Resonanz mit der Hauptschwingung kommen; durch eine Verstärkung der Bremse läſst sich dies vermeiden. Um für $k = 7$ Aperiodizität der Hauptschwingung zu erzielen, müſste $n^2 = 10$ im Fall $v^2 = 1$ gewählt werden, für $k = 10$ dagegen $n^2 = 16$. Für kleinere Werte von v^2 wird durch diese Wahl ebenfalls starke Dämpfung der Schiffsschwingung erzielt (vgl. Fig. 130 und 131). Durch alleinige Betrachtung der freien Schwingung und ihrer Dämpfungsverhältnisse werden wir also auf einen Wert

$$n^2 = 10 \text{ bis } 16, \quad \text{bei } k = 7 \text{ bis } 10$$

geführt.

Wir haben nun weiter zu fragen, ob dadurch auch die erzwungenen Schwingungen hinreichend beeinfluſst werden. Aus (29) erhalten wir, durch Einsetzen der festgesetzten Werte von K, k und n^2:

$$\left|\frac{A_n}{A_0}\right| = \frac{0{,}05 \cdot 7}{10} = 0{,}035$$

$$\text{bezw.} \quad \left|\frac{A_n}{A_0}\right| = \frac{0{,}05 \cdot 10}{16} = 0{,}031.$$

Demnach würde der Wert

$$n^2 = 10 \text{ bis } 16$$

ausreichen, um die Amplitude auf etwa $^1/_{25}$ des Betrags herabzudrücken, den sie ohne Kreisel annähme. Für die erforderliche Winkelgeschwindigkeit ergiebt sich daraus nach pag. 804, wenn Θ das Trägheitsmoment der rotierenden Massen um ihre Axe bezeichnet:

$$(30) \qquad \Theta\omega = 3{,}2\sqrt{QHj} \text{ bis } 4\sqrt{QHj}.$$

Für das obige Beispiel der „Silvana" folgt hiernach eine Winkelgeschwindigkeit von 140 bis 175 $\sec^{-1}$.*)

Wie stellen sich nun die Versuchsergebnisse von Schlick zu dieser Berechnung? Auf Grund der einleitenden Bemerkungen dieses Paragraphen ist zu erwarten, dafs das Resultat ein weniger günstiges sein wird als das von der Rechnung gelieferte. Trotzdem war der Erfolg der Schlickschen Versuche ein überraschend glücklicher. Bei der „Silvana" fand Schlick eine Abdämpfung der erzwungenen Schwingungen auf $\frac{1}{10}$ ihres ursprünglichen Betrags bei einer Winkelgeschwindigkeit des Kreiselrades von 189 $\sec^{-1}$. Da über die dort verwendeten Bremsstärken nichts Näheres bekannt ist, kann das Resultat nicht unmittelbar mit dem unsrigen verglichen werden. Wahrscheinlich verwendete Schlick stärkere Bremsen, als sie unserer Rechnung zu Grunde liegen, und dann ist es schon aus diesem Grunde in Übereinstimmung mit unseren Resultaten auf S. 816, dafs wir eine günstigere Beeinflussung der erzwungenen Schwingungen fanden.

Weiter ist zu beachten, dafs wir von der Annahme einer harmonischen Welle ausgingen, die mit der Schiffsschwingung gerade in Resonanz steht, während es sich in Wirklichkeit um Übereinanderlagerung einer Reihe von Wellen handelt. Von diesen werden aber die

*) Die Formel (30) liefert in unserem Beispiel ähnliche Impulsstärken, wie eine von Föppl angestellte, überschlägliche Überlegung, die bezweckt, die Gröfsenordnung des erforderlichen Impulses zu bestimmen, wenn nur die Dimensionen des Schiffes und sein zu vernichtender anfänglicher Ausschlag (ψ_0) bekannt sind, aufserdem vorausgesetzt wird, dafs der Kreiselrahmen bis zu 45° auspendeln kann. Die betreffende Formel ist (vgl. Technische Mechanik, Bd. VI, § 41)

$$\Theta\omega = \frac{\psi_0}{5}\sqrt{QHJ}.$$

Wenn als Maximalwert von ψ_0 etwa 15° angenommen wird, so wird demnach

$$n = \frac{\Theta\omega}{\sqrt{QHj}} = \frac{1}{20}\sqrt{\frac{J}{j}};$$

wählt man also schätzungsweise für J/j die Verhältnisse wie bei der „Silvana" (vgl. pag. 832), so hat man näherungsweise $n = \sqrt{10}$, wie auch unsere obige Überlegung ergab.

nicht in Resonanz stehenden nach den Ausführungen des ersten Teils von § 5 weniger beeinflufst als die resonierende selbst, wie es ja für gewisse Gebiete der Frequenz der auffallenden Welle sogar vorkommt, dafs der Kreisel die erzwungene Schwingung verstärkt.

Bei Berücksichtigung aller dieser Umstände liefert die immerhin noch nahe Übereinstimmung unseres Resultats mit dem Schlick'schen eine gewisse Bestätigung des in § 4 gemachten Ansatzes der Differentialgleichungen.

Wir haben aber bei der vorhergehenden Berechnung auf einen wichtigen Punkt noch nicht geachtet, nämlich ob unter den angenommenen Verhältnissen die Kreiselrahmenausschläge auch für die erzwungenen Schwingungen innerhalb der verlangten Grenzen bleiben. Nur dann kann eine wenigstens angenäherte Übereinstimmung mit der Praxis erwartet werden. Die Rahmenausschläge berechnen sich aus den Formeln auf pag. 807. Aus Gl. (15) und (17) folgt, wieder unter der Annahme $v^2 = \gamma^2 = 1$ und bei kleinem K:

$$\left|\frac{a}{A_0}\right| = \left|\frac{a}{A}\right| \cdot \left|\frac{A}{A_0}\right| = \frac{K}{n}\sqrt{\frac{J}{j}},$$

also bei Zugrundelegung der früher angenommenen Zahlenwerte und der oben berechneten Impulsgröfsen etwa:

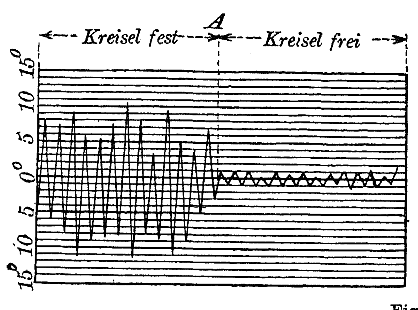
$$\left|\frac{a}{A_0}\right| = 1.$$

A_0 der Ausschlag des Schiffes ohne Kreisel beträgt erfahrungsmäfsig (vgl. die Diagramme Fig. 132) höchstens 10^0 bis 15^0. Fügt man noch eine Korrektion zu, um die nicht mehr streng zutreffende Annahme kleiner Schwingungen in Rechnung zu ziehen, so wird der Ausschlag a etwa 20^0, liegt also in der That innerhalb der Grenzen, für die unsere Rechnungen als gültig anzusehen sind.

Schlick hat seine Versuche dadurch graphisch niedergelegt, dafs er die Schlingerbewegungen durch einen von ihm konstruierten Indikator*) selbstthätig aufzeichnen liefs, der seinerseits auf dem Kreiselprinzip, nämlich auf der raumfesten Lage der Axe eines im Schwerpunkt unterstützten Schwungrads beruht, und zwar wurden Versuche mit dem „Seebär“, später bei stürmischen Wetter auch mit der „Silvana“ und dem „Lochiel“ vorgenommen. Sie wurden in der Weise ausgeführt, dafs das Boot zunächst mit festgebremsten Kreisel quer zur See gelegt wurde. Das Boot geriet in Rollbewegungen bis zu 15^0 nach beiden Seiten, in einzelnen Fällen beim „Seebär“ sogar bis zu 25^0. Dann

*) In dem Vortrag in der Schiffbautechnischen Gesellschaft (pag. 135) erwähnt.

wurde der Kreisel gelöst und die Rollbewegung dadurch fast augenblicklich bis auf 1° bis 2° reduziert. Dem Moment der Auslösung entspricht der Punkt A in den Diagrammen (s. Fig. 132), auf den nur noch die kleinen Rollbewegungen folgen, die die Diagramme zeigen.*)



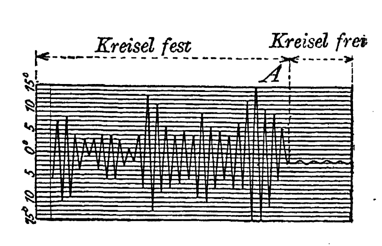


Fig. 132.

Es sind weiter eine Reihe von Versuchen, besonders am „Seebär“ vorgenommen worden, um die Dämpfung der freien Schwingungen zu messen, wie sie durch den Kreisel bewirkt wird. Dazu wurde das Boot künstlich durch einen Kran bis zu etwa 15° seitlich geneigt und dann die Zahl der Schwingungen beobachtet, bis die Neigung auf $\frac{1}{2}$° herabgegangen war. Das Diagramm (Fig. 133) zeigt den Einfluſs des Kreisels. Hier entsprechen die Kurven 1, 2 der Abnahme der Ausschläge bei stillstehendem, die Kurven 3, 4, 5, 6 bei rotierendem Kreisel. Es sinkt z. B. bei der Kurve 5 der Ausschlag von $15\frac{1}{2}$° zu $\frac{1}{2}$° in vier Schwingungen herab, während er ohne Kreisel in Kurve 2 von $13\frac{1}{2}$° zu $\frac{1}{2}$° in 25 Schwingungen gesunken war. Aus der analytischen Behandlung hatten wir sogar gefolgert, daſs es möglich sei, bei verhältnismäſsig kleinem Impuls Aperiodizität der Schiffsschwingung zu erzielen, und zwar für den Fall $v^2 \leqq 1$, d. h. wenn die Kreiselpendelung nicht schneller war als die Schiffsschwingung. Ob praktisch die Dämpfung bis zu dem Grad gesteigert werden kann, bleibe dahingestellt,

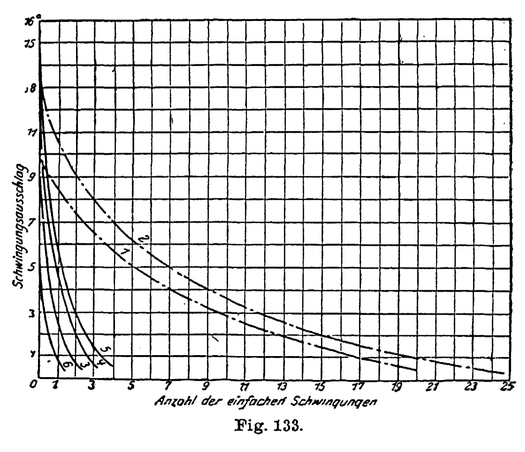


Fig. 133.

*) Die hier wiedergegebenen Figuren sind dem genannten Vortrage entnommen. Ähnliche Diagramme in dem Aufsatz in der Ing.-Zeitschr. 1906, pag. 1933.

doch sind jedenfalls die Kurven der Fig. 133 nicht mehr weit von der Aperiodizität entfernt.*)

Daſs $v^2 \leqq 1$ die günstigere Anordnung ist, stimmt durchaus mit der Erfahrung und ist auch von Schlick selbst aus seinen Versuchsergebnissen gefolgert worden. Einer brieflichen Mitteilung entnehmen wir, daſs beim „Seebär“ durch Beschweren des Oberteils des Kreiselrahmens, also Verlängerung der Periode seiner Pendelung, die Wirkung des Kreisels wesentlich besser wurde. „Die Periode sollte nahezu unendlich groſs sein, aber niemals unter die Periode des Schiffes heruntergehen.“ Die Fig. 130 legt hiervon Rechenschaft ab. Man vergleiche die Kurven I, II ($v < 1$) hinsichtlich der zugehörigen Dämpfung mit den Kurven V, VI ($v > 1$). Übrigens entspricht die Kurve VI, $v^2 = 20$, der von Föppl in der pag. 808 zitierten Arbeit gewählten „ersten Aufhängungsart“.

Hier anschlieſsend können wir die im § 4 vorangestellten Behauptungen, *wieweit bei der Kreiselkonstruktion „Trägheitswirkungen“ einerseits, „Dämpfungswirkungen“ andererseits in Betracht kommen,* nochmals zusammenfassen. Für die erzwungenen Schwingungen selbst sind nach den früheren Diskussionen die „Resonanzwirkungen“, also Trägheitswirkungen, wesentlich, indem durch die Kreiselkoppelung die Periode des Schiffs nach Möglichkeit von der Periode der auffallenden Wellen entfernt wird und dadurch die Amplitude der erzwungenen Schwingung verringert wird. Die Bremsung beeinträchtigt diese Wirkung nur. Günstig wirkt die Bremsung beim Seegange nur in sekundärer Weise durch Abdämpfung der immer gleichzeitig angeregten freien Schwingung.

Für die freien Schwingungen dagegen kommen beide Wirkungen in Betracht, und zwar für kleinen Impuls wesentlich die dämpfenden, für groſsen die Trägheitswirkungen. Die Unterscheidung zwischen „klein“ und „groſs“ hängt hier von der Bremstärke k ab. (Bei $v^2 = 1$ z. B. war als Grenze etwa $n^2 = k^2/4$ anzusehen.)

Daſs bei kleinem n^2 die Dämpfungswirkungen vorherrschen, geht zunächst aus dem auf pag. 831 ausführlicher besprochenen Resultat hervor, wonach bei kleinem n^2 und genügend kleinem k die Dämpfung s mit k wächst, so daſs die Hauptschwingung sogar aperiodisch werden kann, während für $k = 0$ auch die Hauptschwingung immer ungedämpft

*) Man könnte sich, nach einer Bemerkung von Föppl, eine Verbesserung der Bremswirkung von einer Handregulierung der Bremse während des Betriebs versprechen, um dem Umstande leichter Rechnung zu tragen, daſs einerseits der Kreisel genügende Bewegungsfreiheit besitzen muſs, um Energie der Rollbewegung aufzunehmen, andererseits genügend stark gebremst sein muſs, um sie zu vernichten.

blieb. Anderseits wird hier, wenigstens in dem günstigeren Fall $v^2 < 1$, die „freie Frequenz“ $\sqrt{p}$ der Hauptschwingung vergröſsert, also ist die Trägheitswirkung sogar in gewissem Sinne unerwünscht. Für groſse Werte von n^2 dagegen, haben wir gesehen, können die Dämpfungswirkungen mit wachsendem n^2 nicht mehr weiter zunehmen, weil sich die Schiffsdämpfung einer oberen Grenze nähert. Die Trägheitswirkungen dagegen nehmen beständig zu und werden die vorherrschenden.

Wir wollen zum Schluſs nicht unerwähnt lassen, daſs namentlich von technischer Seite gewisse Bedenken gegen die Kreiselkonstruktion erhoben worden sind.

Es handelt sich um die Frage, ob der Kreisel nicht mit der günstigen stabilierenden Wirkung auch unerwünschte Folgen für das Schiff verbinde. Von Marineingenieur F. Berger*) wurde zuerst vermutet, daſs der Schiffskreisel gefährlich für das Schiff werden könne, weil er die „Rollbewegungen des Schiffes in Stampfbewegungen und umgekehrt letztere in erstere umsetze“. Denn falls der Kreisel stark gebremst ist, wie es zur Erzielung günstiger Wirkung ja erforderlich ist, so wird die Energie der Pendelbewegung in der Bremse nicht völlig vernichtet, sondern es wird als Reaktion der Bremskräfte und Kreiselwirkungen ein Moment um eine horizontale Queraxe auf das Schiff übertragen, also Stampfbewegung angeregt. Bei festgestelltem Kreiselrahmen z. B. wird unmittelbar die von der Rollbewegung herrührende Kreiselwirkung auf das Schiff, statt auf den Kreiselrahmen wirken. Anderseits wird eine Stampfbewegung des Schiffes, wenn der Kreisel durch die Bremse gezwungen ist, diese Bewegung mitzumachen, gerade wie die Pendelbewegung des Rahmens selbst, durch ihre Kreiselwirkung Rollbewegung des Schiffes veranlassen. Daſs diese beiden Effekte thatsächtich vorhanden sind, ist zweifellos, daſs sie für das Schiff aber nicht schädlich werden, dafür sorgt ihre Kleinheit.**)

1. Stampfen durch Rollen angeregt. Denkt man sich z. B. den Kreisel ganz festgestellt, in welchem Falle, wie leicht analytisch zu zeigen, die gröſsten Momente auf das Schiff übertragen werden, so sind die beiden Freiheitsgrade des Rollens und Stampfens, die durch die Kreiselwirkungen gekoppelt werden, qualitativ gleichberechtigt, die Ausschläge sind aber, wegen des viel gröſseren Trägheitsmoments der Queraxe, um letztere viel kleiner als die Rollbewegungen um die Längsaxe, und daher ist dieser „erste Berger'sche Effekt“ gewiſs ganz zu vernachlässigen.

Wir können dieses Resultat auch unmittelbar aus früheren Überlegungen in § 4 entnehmen. Während wir nämlich bisher die Längs-

*) Ztschr. d. V. d. Ing., 1906, pag. 982.

**) Vgl. eine Bemerkung von Föppl, ibid. 1906, pag. 983.

axe des Schiffes als fest ansahen, ist jetzt ein weiterer Freiheitsgrad, die Drehung um die Queraxe, in Betracht zu ziehen. Bei festgestelltem Kreiselrahmen tritt dieser Freiheitsgrad direkt an Stelle der Pendelung des Rahmens, so daſs die Koppelung zwischen Roll- und Stampfbewegung qualitativ durch unsere früheren Gleichungen beschrieben wird. Während wir früher zu betonen hatten, daſs bei festgestelltem Kreisel sein Einfluſs auf die Rollbewegung verschwindet, trifft dies jetzt nicht mehr zu, indem die Möglichkeit des Pendels durch die des Stampfens in geringem Grade ersetzt wird. Bei beweglichem Rahmen andererseits verteilt sich natürlich die Schwingung auf die beiden Freiheitsgrade des Pendelns und Stampfens in einem durch die Bremsstärke bestimmten Verhältnis.

Bei festgestelltem Kreiselrahmen überwiegt aber jetzt das Trägheitsmoment für die Koordinate ϑ, die jetzt die Stampfschwingung, wie früher die Kreiselpendelung miſst, weit über das Trägheitsmoment der Rollschwingungen. An Stelle des früheren Resultates (vgl. pag. 803), daſs ausgenommen im Resonanzfall eine ursprüngliche Kreiselpendelung nur sehr geringe Rollschwingungen anregen kann, tritt also jetzt die Aussage, daſs eine Rollschwingung nur geringe Stampfbewegungen auslösen kann, wenn nicht Roll- und Stampfschwingungen gerade in Resonanz stehen.

2. Rollen durch Stampfen angeregt. Der zweite Effekt dagegen läſst, da über seine Bedeutung mehrfach diskutiert worden ist, eine nähere quantitative Prüfung, wieder auf Grund der Formeln des § 4, wünschenswert erscheinen. Denken wir uns z. B. zu Anfang das Schiff in Ruhe mit einem Ausschlagwinkel ϑ_0 um die Stampfaxe und fragen nach der folgenden Bewegung, insbesondere nach dem Bruchteil der Energie, der zeitweise in Energie der Rollbewegung verwandelt wird. Den Bewegungsverlauf beschreiben dann, da wir wieder den Kreiselrahmen fest mit dem Schiff verbunden denken, die Formeln (8‴) des § 4 (pag. 802), wenn wir nur die dort vorausgesetzte Kreiselpendelung jetzt durch die Stampfschwingung des Schiffes ersetzen, d. h. das Trägheitsmoment j mit dem des Schiffes um seine Queraxe, K, vertauschen, und das Schweremoment $q \cdot h$ mit $Q \cdot S$, wo S die metacentrische Höhe für die Stampfschwingung bezeichne. Die Bewegung ist natürlich wieder die Überlagerung zweier Schwingungen in beiden Freiheitsgraden, und zwar werden jetzt bei gegebenem Kreiselimpuls die Schwingungen in ihrer Frequenz viel weniger als früher bei pendelndem Kreiselrahmen von der freien Roll- und Stampfschwingung ohne Kreisel abweichen.

Unter Ausschluſs absoluter Resonanz zwischen Roll- und Stampfschwingung können wir daher folgende Näherungsdarstellung aus den Formeln (8‴) zunächst für die resultierende Stampfbewegung ent-

nehmen, wobei wir die Frequenzen α_1 und α_2 durch die Werte ersetzen, die sie im Falle $N = 0$ annehmen:

$$\vartheta = a_1 \cos\sqrt{\frac{QH}{J}}\,t + a_2 \cos\sqrt{\frac{QS}{K}}\,t,$$

$$a_1 + a_2 = \vartheta_0,$$

$$\left|\frac{a_1}{a_2}\right| = N^2 \frac{SJ}{Q(KH - JS)^2}.$$

Führen wir noch, genau entsprechend unseren früheren Parametern n^2 und v^2, unbenannte Gröfsen ein:

$$\mathfrak{N}^2 = \frac{N^2}{QHK}; \quad w^2 = \frac{QS/K}{QH/J},$$

so wird:

$$\left|\frac{a_1}{a_2}\right| = \mathfrak{N}^2 \frac{w^2}{(1 - w^2)^2}.$$

Seiner Definition entsprechend ist unser jetziger Parameter $\mathfrak{N}^2$, im Vergleich mit dem früheren n^2 (vgl. pag. 832), sehr klein, nämlich

$$\mathfrak{N}^2 = n^2 \cdot \frac{j}{K}.$$

Nun wird K, das Trägheitsmoment um die Stampfaxe, mindestens etwa 50 mal so grofs sein als das um die Rollaxe, J, und nach pag. 832 ist, im Falle der „Silvana", annähernd $J = 4000\,j$, also

$$\mathfrak{N}^2 = 2n^2 \cdot 10^{-5}.$$

Unter Zugrundelegung des bei der „Silvana" gewählten Parameterwertes $n^2 = 20$ wird somit

$$\mathfrak{N}^2 = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Andererseits erhöht der Frequenzfaktor $w^2/(1 - w^2)^2$ bei Ausschlufs der Resonanz die Gröfsenordnung von $|a_1/a_2|$ nicht, indem er nur in der nächsten Nähe von $w = 1$ gröfser als 1 ist.

Aus diesem Verhältnis aber können wir den Bruchteil der Energie in bekannter Weise entnehmen, der zeitweise der Stampfbewegung entzogen und in Rollbewegung verwandelt wird. Die Überlagerung der beiden Schwingungen ist nämlich eine „Schwebung" in der Stampfbewegung, mit der maximalen Energie*):

$$E_1 = \frac{QS}{2}(a_1 + a_2)^2 = \frac{QS}{2}\vartheta_0^{\,2}$$

und der minimalen Energie:

$$E_2 = \frac{QS}{2}(a_1 - a_2)^2.$$

---

*) Diese Formeln werden allerdings unter der Annahme abgeleitet, daß die Frequenzen α_1 und α_2 nahezu übereinstimmen, also w wenig von 1 verschieden ist. Bei genauerer Rechnung würde in den Ausdruck für die Energieschwankung noch eine Potenz von w als Faktor eingehen, der aber die Gröfsenordnung nicht beeinflufst.

Die Energieschwankung beträgt also nur etwa 10^{-4} bis 10^{-3} der mittleren Energie des Stampfens, und auch nur dieser Bruchteil wird zeitweise in Rollenergie verwandelt. Wir kommen somit zu dem Resultat, daſs auch der „zweite Berger'sche Effekt", ausgenommen den Fall der Resonanz zwischen Roll- und Stampfschwingung, für das Schiff ernstlich nicht in Frage kommen wird.

Übrigens ist von Herrn Skutsch*) der Vorschlag gemacht, die besprochenen Wirkungen durch Verwendung zweier Kreisel unschädlich zu machen. Die beiden Kreisel sollen symmetrisch zur mittleren Queraxe eingebaut sein und mit entgegesetztem Drehsinn, aber gleicher Geschwindigkeit umlaufen, überhaupt in allem genaue Spiegelbilder sein, was durch zwangläufige Verbindung zu erreichen wäre. Wegen des entgegengesetzten Umlaufsinns würden dann durch die Rollbewegungen entgegengesetzte Ausschläge der beiden Kreisel veranlaſst und die auf das Schiff übertragenen, auf Anregung des Stampfens wirkenden Momente würden sich daher aufheben. Das Gleiche gilt für die Umkehrung, die durch die Stampfbewegung ausgelösten Momente.

3. Materialbeanspruchung. Ein weiteres Bedenken, das man gegen die Anwendung des Kreisels vorgebracht hat, beruht auf der Annahme, daſs ein in der geschilderten Weise an der Rollbewegung gehindertes Schiff besonders stark von der See, namentlich von überbrechenden Wellen zu leiden habe. Von den Teilnehmern an den Probefahrten wird aber ausgesagt, daſs nur an Stelle der Rollbewegungen ein ruhiges Heben und Senken des Schiffes in der Wellenoberfläche getreten sei, ohne Überbrechen von Wellen; die anrollenden Wellen seien einfach unter dem Schiff verschwunden. Andererseits wäre wohl denkbar, daſs durch die Verhinderung der Rollbewegung eine stärkere Beanspruchung der inneren Verbände eintritt. Schlick selbst bestreitet solche Bedenken mit dem Hinweis auf die groſsen Beanspruchungen, die groſse Schiffe im Seegang auszuhalten haben, dem sie ja nur wenig folgen, wenn nicht gerade die auffallende Welle in Resonanz mit der Schiffschwingung steht. Ebenso ist es bekannt, daſs die Rollbewegungen der Segelschiffe bei gesetzten Segeln durch den Luftwiderstand ganz unterdrückt werden, ohne daſs das Schiff Schaden leidet.

Man kann ferner anführen, daſs die ganze durch den Kreisel zu vernichtende Energie der Rollbewegung durchaus nicht sonderlich groſs ist. Sonst wäre es überhaupt nicht möglich, durch den im Verhältnis zum Schiff doch kleinen Kreisel fast die gesamte Energie zu zerstören.

*) Ztschr. d. V. d. Ing. 1908, S. 464.

Berechnen wir auf Grund der S. 832 gegebenen Zahlen für die „Silvana“ das vom Kreisel auf das Schiff übertragene Moment

$$N \cdot \frac{d\vartheta}{dt},$$

und zwar für die vom Seegange erzwungenen Schwingungen. Deren Periode wählen wir, wie es mittleren Verhältnissen entspricht, zu $\tau = 8$ sec. Nehmen wir den ungünstigsten Fall an, dafs der Kreisel den gröfstmöglichen Ausschlag von 45^0 erreicht, so wird $\vartheta = \frac{\pi}{4} \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$, also $\frac{d\vartheta}{dt}$ im Maximum gleich $\frac{2\pi^2}{4\tau} = \frac{\pi^2}{16}$ sec^{-1}. Ferner war nach pag. 832 $N = \Theta\omega = 175 \cdot 189$ mkgsec. Also wird das fragliche Moment rund 20000 mkg. Nehmen wir als Lagerabstand am Kreiselrahmen etwa 2 m, so wird in jedem Lager eine Kraft von 10 Tonnen angreifen, also eine im Verhältnis zu den sonst im Schiff vorhandenen Gewichten mäfsige Last. Diese Beanspruchung erfährt das Schiff durch den Kreisel.

Die angeführten Bedenken dürften kaum ein wesentliches Hindernis für eine ausgedehntere Verwendung des Schiffskreisels sein, und überhaupt werden die eigentlichen Probleme, zu denen die weitere Vervollkommnung der Konstruktion führt, nicht auf der dynamischen, sondern auf der technischen Seite liegen.

Die Zukunft mufs lehren, ob sich der kühne Gedanke Schlicks trotz der seiner Durchführung entgegenstehenden erheblichen Kosten und Schwierigkeiten im Verkehr allgemein einbürgern kann, oder ob er in der Geschichte mehr als ein markantes Beispiel grofsen Mafsstabes für die tatsächliche Ausführbarkeit richtig gedachter mechanischer Konstruktionen dastehen wird.

§ 7. **Der Kreiselkompafs.**

Bei Besprechung der Foucault'schen Versuche, die Erdrotation durch ihre Einwirkung auf die Bewegung eines rasch rotierenden Kreisels nachzuweisen, haben wir*) die von Foucault ausgesprochene Idee erwähnt, diese Wirkungen zur Orientierung auf der Erde zu benutzen, also ein Kreiselinstrument als Kompafs auszubauen. Es handelte sich hier um die Eigenschaft eines Kreisels, dessen Figurenaxe nur in der Horizontalebene beweglich ist (eines Kreisels „von zwei Freiheitsgraden“), sich wie eine Deklinationsnadel selbstthätig in den Meridian einzustellen, andererseits eines Kreisels, dessen Figurenaxe nur in der Meridianebene beweglich ist, sich wie eine Inklinationsnadel in die Richtung der Erdaxe einzustellen.**)

---

*) pag. 734 f. **) pag. 746 f.

An die praktische Ausführung dieses Gedankens konnte naturgemäfs erst geschritten werden, nachdem es gelungen war, auf lange Dauer ohne Unterbrechung umlaufende Schwungräder herzustellen, was jetzt durch Verwendung von Elektromotoren erreicht wird. Ein wesentliches technisches Erfordernis ist hierbei, dafs das äufsere Moment, das entgegen der Reibung den Eigenimpuls konstant erhält, strenge um die Figurenaxe wirkt, also keine Impulsänderungen in der Äquatorebene erzeugt. In den 80er Jahren sind Versuche von Seiten der Kriegsmarinen in Frankreich, Holland und England ausgeführt worden, doch ist über ihr Ergebnis wenig an die Öffentlichkeit gekommen, jedenfalls haben sie nicht zur dauernden Einführung eines Rotationskompasses geführt.*) In Deutschland wurden die ersten Versuche in den 90er Jahren von Werner von Siemens geleitet, in Anlehnung an ein von Van den Bos angemeldetes Patent.**)

Die Frage nach der Herstellung eines brauchbaren Kreiselkompasses ist neuerdings wieder akut geworden, insbesondere zur Verwendung auf Kriegsschiffen, auf denen durch die Vermehrung der Eisenmassen das magnetische Erdfeld derartig verzerrt wird, dafs die Angaben des Magnetkompasses im höchsten Grade unsicher, ja fast unbrauchbar werden. Besonders erschwerend wirkt der Umstand, dafs die Eisenmassen an Bord vielfach verlagert werden (Munition, Geschütze) und dafs der Betrieb elektrischer Maschinen die Kompafsnadel direkt magnetisch beeinflufst, sowie dafs der auf das Schiff vom Erdfeld induzierte Magnetismus von Schiffsbewegungen abhängt.***) Es sind daher von verschiedenen Firmen Versuche in dieser Richtung gemacht worden, von denen aber bisher nur die von Anschütz-Kämpfe in Kiel zur Veröffentlichung gelangt sind†) und zur praktischen Verwendung geführt haben.

Hier wird nicht die Foucault'sche Anordnung verwendet, sondern ein Kreisel von drei Freiheitsgraden, der unter dem Einflufs der Schwere steht, entweder so, dafs der Schwerpunkt auf der Figurenaxe oder in der Äquatorebene des Kreisels liegt.

---

*) M. Edm. Dubois: Sur le gyroscope marin, C. R. 98, pag. 227, 1887; W. Thomson: Gyrostatic model of a magnetic compass, Nature 30, pag. 524, 1884.

**) D. R. P. Kl. 42, No. 34513.

***) S. Encyklopädie d. math. Wissensch. VI 1, 5, pag. 320 ff. (Nautik, von H. Meldau).

†) Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, X, 1909, pag. 352; dazu math. Anhang (Max Schuler) pag. 561. Die Versuche der Firma Hartmann & Braun, Frankfurt a. M., nach Konstruktionen von Prof. Ach, sind noch nicht veröffentlicht.

Sehen wir von der Schwere ganz ab, so wäre der Kreisel sowohl gegen die Erde wie gegen den Raum in Ruhe, wenn seine Figurenaxe parallel zur Erdaxe stände. Dieses Gleichgewicht wird durch die Schwerewirkung gestört, im ersteren Falle haben wir einen schweren symmetrischen, im zweiten einen, wenigstens dem Kraftangriff nach, schweren unsymmetrischen Kreisel.

Beim schweren symmetrischen Kreisel zunächst zieht die Schwerkraft die Figurenaxe aus ihrer raumfesten Lage hinaus, und die entstehende Raumbewegung hat weiter ablenkende Kreiselwirkungen zur Folge. Es wird nun, wie bei dem früher behandelten Gilbert'schen Barygyroskop*), eine Ruhelage relativ zur Erde möglich sein. Die Bewegung des gegen die Erde ruhenden Kreisels ist dann, im Raume betrachtet, eine reguläre Präcession der Figurenaxe um die Erdaxe, bei der Schwerkraft und Kreiselwirkungen sich das Gleichgewicht halten. Die Figurenaxe liegt dabei beständig in der Meridianebene des Beobachtungsortes, unter einem zu bestimmenden Winkel gegen die Vertikale. Diese Bestimmung liefert einfach die Bedingung der regulären Präcession:

Kreiselwirkung bei der Erdrotation = Schweremoment,

erstere durch die Formel (II) von S. 764 bestimmt.

Bei dieser Präcession ist der Unterstützungspunkt des Kreisels nicht fest, sondern er wird, auch wenn er gegen die Erde ruht, auf einem Parallelkreis um die Erdaxe geführt, er erfährt also beständig eine radial in der Ebene des Parallelkreises gerichtete Beschleunigung. Eine Beschleunigung des Unterstützungspunktes wirkt aber wie eine am Schwerpunkt angreifende, entgegengesetzt gerichtete Kraft (vgl. z. B. S. 612), deren Gröſse das Produkt aus dieser Beschleunigung und der Masse des Systems ist. Diese scheinbare Kraft ist die der Erdrotation entsprechende Centrifugalkraft, die andererseits die Abplattung der Erdoberfläche bewirkt. Wir setzen sie daher richtig in Rechnung, wenn wir die im Lote des Erdortes liegende, thatsächlich gemessene Kraft als Schwerkraft betrachten, die Resultante aus reiner Gravitationswirkung und Centrifugalkraft.

Diese ideale Bewegungsform des Kreisels, die wir weiterhin als „Raumpräcession" bezeichnen wollen, würde zu Stande kommen, wenn von Anfang an die Kreiselaxe im Meridian unter der genau richtigen Erhebung gegen den Horizont eingestellt würde, wobei allerdings die Einstellung von der geographischen Breite und der Schiffsgeschwindigkeit des Ortes abhängen, also mit der Schiffsbewegung korrigiert werden

*) pag. 753.

müſste. Auf diesem Prinzip beruht ein von Anschütz-Kämpfe konstruiertes Kreiselkompaſsmodell*), das die Firma in einem früheren Stadium ihrer Versuche zum Patent angemeldet hat.

Soll der Kreisel bei seiner Raumpräcession die Nord-Südrichtung angeben, so muſs er eine merkliche Abweichung von der Vertikalen haben; daher muſs wegen der verhältnismäſsigen Kleinheit der durch die Erddrehung verursachten Kreiselwirkungen auch das Schweremoment sehr klein sein. Die Folge davon ist aber, daſs die Gleichgewichtslage im Meridian einen sehr geringen Stabilitätsgrad besitzt, so daſs der Kreisel auf einen kleinen Anstoſs hin, wie er durch die Schiffsbewegungen fortwährend zu Stande kommt, die Ruhelage verläſst und ähnlich, als ob die Erde ruhte, relativ zur Erde eine langsame Präcession um die Vertikale ausführt oder zum mindesten in einer sehr langen Schwingung in den Meridian zurückkekrt.

In dieser unzureichenden Stabilität liegt der hauptsächliche Grund, daſs die erste Form des Kompaſses nicht zur Ausführung gekommen ist.

Betrachten wir nun den anderen Fall des unsymmetrischen Kräfteangriffs, der bei dem ausgeführten Kompaſskreisel von Anschütz-Kämpfe vorliegt.**) Es sei der äuſsere Ring des kardanischen Gehänges um die Vertikale drehbar, der innere Ring um den horizontalen Durchmesser des äuſseren Ringes, die „Knotenlinie“ des Kreisels. Dieser innere Ring trage ein Übergewicht in der Art, daſs in seiner Gleichgewichtslage seine Ebene *horizontal*, also auch die in der Ebene des inneren Ringes senkrecht zu dessen Drehaxe gelagerte *Figurenaxe horizontal* liegt. Der Schwerpunkt des Systems liegt dann in der Äquatorebene des Kreisels, ohne aber die Rotation um die Figurenaxe mitzumachen. Dieses rein schematische Bild der Anordnung genügt für unsere nächsten Zwecke; die wirkliche Ausführung wird am Ende des Paragraphen besprochen werden.

In kinetischer Hinsicht kann das System immer noch als symmetrischer Kreisel aufgefaſst werden, wenn die Eigenrotation so stark ist, daſs die Trägheit der Ringe neben der des Schwungkörpers zu vernachlässigen ist. Das Schweremoment wirkt dabei nach wie vor um die Knotenlinie des Kreisels, nur ist es nicht mehr dem Sinus, sondern

---

*) D. R. P. Nr. 178814, 1905.

**) D. R. P. Nr. 182855, 1908. Versuche mit diesem System sind auch von O. Martienssen gemacht worden, s. Physik. Ztschr. VII, Nr. 15, S. 535, 1906. Bei Versuchen von Föppl zum Nachweis der Erdrotation tritt an Stelle der Schwerkraft die Elastizität der Aufhängefäden des ebenfalls horizontal liegenden Kreisels. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. München, 1904, Heft I. Vgl. auch die Zusätze am Schluſs dieses Buches.

dem Cosinus der früher als ϑ bezeichneten Abweichung der Figurenaxe von der Vertikalen proportional. Die vorher für den symmetrischen Kreisel gemachten Angaben lassen sich also auch auf diese Anordnung übertragen. Es ist eine stationäre „Raumpräcession" möglich, bei der die Figurenaxe beständig in die Nordrichtung des Beobachtungsortes weist, mit konstanter Erhebung über den Horizont. Die Erhebung bestimmt sich wieder aus der Präcessionsbedingung:

Schweremoment = Kreiselwirkung,

und kann sehr klein gemacht werden, wenn das Schweremoment genügend groſs ist.

Diese stationäre Bewegung ginge im Falle der ruhenden Erde in die Gleichgewichtslage mit horizontaler Axe über. Ähnlich wie in diesem Grenzfall verschwindender Erddrehung wird die allgemeine Bewegung die Überlagerung dieser stationären Bewegung mit einer Präcession um die Vertikale, einer „Horizontalpräcession", sein, die zu Stande kommt, wenn ein genügend groſser Anstoſs die Raumpräcession stört, aber in ihrem Charakter natürlich durch die Erddrehung beeinfluſst ist. Bei einem kleinen Anstoſs dagegen wird die Horizontalpräcession in eine Schwingung um die Nordrichtung ausarten.

Es ist hier nicht ohne Weiteres einzusehen, wie die Richtkraft zu Stande kommt, die den Kreisel in den Meridian zurückzieht; eine solche hatten wir früher nur bei dem Foucault'schen Kreisel von zwei Freiheitsgraden kennen gelernt. Man kann sich nun die dynamische Wirkungsweise klar machen durch Vergleich eben mit dem Foucault'schen Kreisel, der nur in der Horizontalebene beweglich ist. Die späteren analytischen Ergänzungen werden diese allgemeinen Vorstellungen näher belegen.

Im Foucault'schen Falle verhindert ja die Führung in der festen Horizontalebene die Axe, bei vorhandener Erdrotation im Raume stille zu stehen. Die dadurch erzwungene Raumbewegung hat die Kreiselwirkung zur Folge, die die Axe in den Meridian zurückzieht, also die Schwingung um den Meridian veranlaſst. Die Impulsverlagerung bei dieser Schwingung wird durch das Moment der auf der Horizontalebene senkrecht stehenden Drucke geleistet (s. pag. 746). Was hier die zwangsweise Führung in der Horizontalebene macht, bewirkt bei unserer Anordnung das Schweremoment des Übergewichts, das gewissermaſsen eine nachgiebige Führung darstellt. Es leistet qualitativ dieselbe Impulsverlagerung, wie dort die Führungsdrucke, zieht also die Figurenaxe in die Gleichgewichtslage zurück. Da übrigens auch bei der Foucault'schen Anordnung die Elastizität der horizontalen Führungsebene in Betracht kommt, die Führung also thatsächlich keine völlig zwangsweise ist, so

fällt der Unterschied qualitativ überhaupt fort, es ist nur bei Foucault das Schweremoment als sehr groſs zu denken.

Nimmt man z. B. den „Nordpol“ der Figurenaxe zu Anfang in horizontaler Lage und nach Osten weisend an. Er wird nun zunächst seine Lage im Raume beibehalten, daher wegen der Erddrehung relativ zum Horizont sich heben. Das dadurch entstehende Schweremoment verlagert den Impuls von seiner östlichen Lage in nördlicher Richtung, und damit erfährt die Figurenaxe, die im Mittel der Impulsaxe folgt, wie von der pseudoregulären Präcession her bekannt ist, eine Richtkraft nach Norden. Zeigte dagegen der „Südpol“ der Figurenaxe nach Osten, so wird dieser in gleicher Weise nach Süden abgelenkt, der Nordpol erfährt also wieder eine Richtkraft nach Norden, so daſs in der That die Nordlage eine stabile Gleichgewichtslage für den Nordpol der Figurenaxe bedeutet.

Und zwar wird, wie die analytischen Entwicklungen bestätigen werden, dieser Gleichgewichtslage bei der jetzigen Anordnung eine verhältnismäſsig groſse Stabilität zukommen, der vorher erwähnten symmetrischen Form gegenüber wegen des vergröſserten Schweremoments, das in der geschilderten Weise die Einstellung in den Meridian in entsprechend kürzerer Zeit bewerkstelligt; der Foucault'schen Anordnung gegenüber ist die Erhöhung der Stabilität anderer Art, nämlich eine durch das Vorhandensein der drei Freiheitsgrade bedingte Unempfindlichkeit gegen Störungen von nicht zu langer Periode. Das Schema dieser Stabilierung ist nur durch das Hinzutreten des Schweremoments, das in gewissem Maſse die Freiheitsgrade beeinträchtigt, von dem in § 1 (unter IV) behandelten verschieden. Die dort betonte spezifische Widerstandsfähigkeit gegen Richtungsänderungen äuſsert sich auch hier noch im verlangsamten Nachgeben, einer „effektiven Trägheit“, die den Kreisel gegen Störungen von nicht zu langer Periode unempfindlich macht. Sie verschwindet erst für unendlich groſses Schweremoment, den Fall des Foucault'schen Kreisels, der Störungen nur noch sein eigenes Trägheitsmoment entgegenzusetzen hat. Die Stabilität kann noch verstärkt werden durch geeignete Dämpfungsvorrichtungen, deren bewundernswürdige Durchführung einen Hauptanteil an dem Erfolg des Kreiselkompasses hat.

Gröſstmögliche Erhöhung der Stabilität in der stationären Nord-Südlage ist insbesondere erforderlich wegen der Einwirkung der Schiffsbewegungen auf den Kreisel. Denn jede Bewegung des Schiffes bedeutet eine Störung seiner Gleichgewichtsbedingungen, veranlaſst also Schwingungen, die in engen Grenzen gehalten werden müssen, damit der Apparat praktisch brauchbar sei. Zwei Fragen sind nun zu beantworten: 1. Wie reagiert der Kreisel auf eine gleichmäſsige Bewegung des Schiffes? 2. Wie reagiert der Kreisel auf eine Beschleunigung des Schiffes?

1. Fährt das Schiff mit konstanter Geschwindigkeit von Ost nach West, oder umgekehrt, so ist diese Bewegung gleichbedeutend mit einer kleinen Verringerung, bezw. Vergröfserung der Erdrotationsgeschwindigkeit. Im ersten Fall ist, angenommen, dafs sich die stationäre Raumpräcession eingestellt hat, deren Präcessionsgeschwindigkeit eine geringere als bei ruhendem Schiff; dieser entspricht eine kleinere Kreiselwirkung, der also auch ein kleineres Schweremoment das Gleichgewicht halten mufs. Die Folge ist dann nur eine etwas geringere Erhebung der Figurenaxe über den Horizont. Im anderen Falle wird umgekehrt die Figurenaxe eine etwas gröfsere Erhebung annehmen. Diese Wirkung ist dieselbe wie beim Übergang zu einer anderen geographischen Breite und unschädlich, da sie die Weisung nicht beeinflufst.

Eine Fahrt in der Nord-Südrichtung andererseits ist gleichbedeutend mit einer zur Erddrehung hinzukommenden Drehung um einen äquatorialen Durchmesser, wobei aber die resultierende Axe aus der Erddrehung und dieser hinzukommenden Drehung wegen der Kleinheit der letzteren wenig von der Polaraxe abweicht. Die schliefsliche Wirkung ist nun, dafs bei der stationären Raumbewegung die Figurenaxe sich in die Vertikalebene durch diese resultierende Drehaxe einstellt. Ihre Richtung weicht also von der Meridianebene ab, jedoch, ausgenommen in hohen Breiten, nur um einen kleinen Winkel. Die Abweichung, die sich westlich bei Süd-Nord- und östlich bei Nord-Südkurs ergiebt, beträgt z. B. für einen mittleren Geschwindigkeitswert, etwa 16 Knoten in der Stunde*):

für die Breite:	0^0	20^0	40^0	60^0	70^0
Abweichung:	$1{,}02^0$	$1{,}04^0$	$1{,}33^0$	$2{,}03^0$	$2{,}97^0$.

2. Wir kommen nun zu den Beschleunigungseffekten, die in erster Linie beim Übergang von einer zu einer anderen verschieden grofsen oder verschieden gerichteten Geschwindigkeit auftreten. Vermöge der bei der wirklichen Konstruktion ausdrücklich vorgesehenen Dämpfung stellt sich die Figurenaxe, sobald die Geschwindigkeit wieder gleichförmig geworden ist, in die neue Gleichgewichtslage ein, wenn diese einen genügenden Stabilitätsgrad besitzt. Durch die Störung der ursprünglichen Gleichgewichtsbedingungen aber entstehen Schwingungen, deren Amplituden den Betrag der schliefslich erreichten Abweichung überschreiten können. Wie kommen des Näheren solche Schwingungen zu Stande?

Bei einer Geschwindigkeitsänderung des Schiffes in ost-westlicher Richtung behält der Kreisel zunächst seine Raumpräcessionsgeschwindig-

*) Siehe den pag. 846 zitierten Aufsatz von Schuler, pag. 569.

keit bei, da ja das Schweremoment sich zunächst noch nicht verändert hat. Da diese nicht mehr mit der Raumgeschwindigkeit des Schiffes übereinstimmt, so weicht der Kreisel aus der Meridianebene seitlich aus und beginnt eine von Nutationen überlagerte, langsame Horizontalpräcession. Denn eine solche mufs immer eintreten, wenn die Gleichgewichtsbedingung der Raumpräcession (pag. 849) gestört wird, wie bei ruhender Erde jeder Anstofs eine pseudoreguläre Horizontalpräcession bedingt. Dabei ist eine genügende Gröfse der Richtkraft nach dem Meridian erforderlich, damit die Figurenaxe nicht eine vollständige Präcession ausführt, sondern nach einem kleinen Ausschlag in einer Schwingung um die neue Gleichgewichtslage in den Meridian zurückkehrt. Wir werden diese Forderung noch quantitativ zu präcisieren haben, bemerken aber im Voraus, dafs schon wegen der Kleinheit der Störung diese Ausschläge sehr klein sind neben den gleich zu besprechenden Ausschlägen bei der nämlichen Geschwindigkeitsänderung in Richtung des Meridians und daher praktisch nicht in Betracht kommen. Übrigens sind sie auch deshalb weniger wesentlich, weil die Schiffahrt im Allgemeinen nicht auf Breitenkreisen, sondern auf gröfsten Kreisen erfolgt.

Die Beschleunigung des Unterstützungspunktes ist nach den bekannten Trägheitsgesetzen einer am Schwerpunkt angreifenden, entgegengesetzten Kraft äquivalent. Für eine Ost-Westbeschleunigung ist deren Moment um die Figurenaxe gerichtet und daher unwesentlich. Für eine Nord-Südbeschleunigung dagegen wirkt ihr Moment um die Knotenlinie und hat, wie das Schweremoment, in letzter Linie eine pseudoreguläre Horizontalpräcession zur Folge, die zunächst so lange andauert, als die Beschleunigung währt. Es ist erforderlich, dafs während der Andauer der Beschleunigung der Gesamtbetrag dieser Präcessionsbewegung innerhalb praktischer Grenzen bleibt. Übrigens ist diese Abweichung stets nach derselben Seite gerichtet, wie die der nachher sich einstellenden neuen Gleichgewichtslage (vgl. oben), so dafs für die nun resultierende Schwingung nur die Differenz dieser beiden Abweichungen als Amplitude in Betracht kommt.

Beschleunigungen des Schiffes, und zwar im Meridian und senkrecht dazu, kommen bei jeder Wendung in Frage. Daher steht die Figurenaxe an einer Kurve nicht völlig still, wie die Magnetnadel, sondern sie macht kleine Schwingungen, und nur wenn diese genügend klein sind, läfst der Kreiselkompafs die Kurve richtig erkennen.

Neben den absichtlichen Beschleunigungen des Schiffes kommen aber auch alle unregelmäfsigen Bewegungen ganz wesentlich in Betracht, wie Schwingungen des Schiffes und der Kreiselunterlage. Da es sich bei solchen Störungen stets um kurzperiodische handelt, so können sie, nach

den bekannten Resonanzprinzipien, dadurch unschädlich gemacht werden, dafs die Eigenschwingungsdauer des Kreisels grofs gewählt wird. Dies wird nun gerade durch die schon genannte effektive Trägheit des Anschütz'schen Kreisels erreicht, ohne dafs es deshalb nötig wäre, zu grofse und technisch nachteilige Massen anzuordnen. Die Gröfse der Schwingungsdauer ist aber andererseits naturgemäfs beschränkt durch die Forderung, dafs der Kreisel bei einer gröfseren Störung nicht zu lange braucht, um seine Gleichgewichtslage zu erreichen. Bei dem Anschütz-Kämpfe'schen Apparat ist als günstiges Mittel eine Schwingungsdauer von 70 Minuten gewählt, und überdies werden durch kardanische Hängung des ganzen Systems äufsere Stöfse nach Möglichkeit von vornherein abgeschwächt. In der durchaus notwendigen Länge der Schwingungsdauer scheint insofern eine Schwierigkeit*) zu liegen, als eine so langsame Schwingung nicht unmittelbar dem Auge als solche kenntlich ist. Nun ist aber jede Schwingung, wie wir noch sehen werden, mit einer gleichperiodischen geringen Hebung und Senkung der Figurenaxe verknüpft, die durch eine empfindliche Libelle auf der Kompafsrose angezeigt wird und dem Steuermann die augenblickliche Mifsweisung des Kompasses, das Vorhandensein einer Schwingung, zu erkennen giebt. Bei einer gleichzeitigen Wendung wird allerdings die Libelle für diesen Zweck vorübergehend unbrauchbar, da dann durch die Zentrifugalkraft ihre Gleichgewichtslage gestört wird.

Wir haben des Weiteren den Bewegungsverlauf analytisch darzustellen. Bei der Berechnung der Kreiselwirkungen machen wir wieder**) die Annahme, dafs die Impulsaxe mit der Figurenaxe zusammenfalle, vernachlässigen also den Impuls, welcher der Bewegung der Figurenaxe um die Erdaxe und relativ zur Erde entspricht, neben dem Rotationsimpuls um die Figurenaxe. Als wirkende Momente haben wir dann das Schweremoment und die Kreiselwirkungen, die von den Raumbewegungen der Figurenaxe herrühren, anzusetzen.

Es bezeichne ϑ die Erhebung der Figurenachse über den Horizont, und zwar bedeute positives ϑ eine Hebung der Seite, von der aus die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt, also des „Nordpols“; ψ die westliche Abweichung des Nordpols von der Nordrichtung SN. P sei das Schweremoment für den Ausschlag $\frac{\pi}{2}$, also $P \sin \vartheta$ für den Ausschlag ϑ, B das Trägheitsmoment des ganzen Systems um die vertikale Axe, A um die horizontale Knotenlinie, N der Eigenimpuls.

*) Vgl. die Diskussion zu dem pag. 846 zitierten Vortrag von Anschütz.

**) Wie § 1 dieses Kap. unter I und II. Vgl. auch die früheren Näherungsformeln über pseudoreguläre Präcession in Kap. V, die wesentlich auf dieser Annahme beruhten.

In A und B sind außer der Masse des Schwungringes die Massen der Aufhängevorrichtung einbegriffen, soweit sie an der Bewegung der Schwungringaxe teilnehmen. A ist konstant, B kann bei kleinen Erhebungen ϑ annähernd als konstant angesehen werden, für die Konstanz von N sorgt der Antrieb. Ferner sei ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, φ die geographische Breite. Die Erddrehung zerlegen wir in die Komponenten $\omega \sin\varphi$ um die Vertikale und $\omega \cos\varphi$ um die horizontale Nord-Südrichtung.

Diese Drehkomponenten geben Anlaſs zu Kreiselwirkungen, deren Axe senkrecht auf der fraglichen Drehaxe und der Impulsaxe steht. Eine einfache geometrische Überlegung gibt für diese die folgenden nach der Formel (II) des § 1 berechneten Werte:

Um die Knotenlinie:

$$K = N\omega\,(\sin\varphi \cos\vartheta - \cos\varphi \sin\vartheta \cos\psi).$$

Um die Vertikale:

$$K' = -N\omega \cos\varphi \cos\vartheta \sin\psi.$$

Von der Bewegung relativ zur Erde rühren die Kreiselwirkungen her:

Um die Knotenlinie:

$$K_1 = N\frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta.$$

Um die Vertikale:

$$K_1' = -N\frac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta.$$

Daher sind die Bewegungsgleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} A\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} = N\omega\,(\sin\varphi\cos\vartheta - \cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi) \\ \qquad\qquad + N\dfrac{d\psi}{dt}\cos\vartheta - P\sin\vartheta \\ B\dfrac{d^2\psi}{dt^2} = -N\omega\cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi - N\dfrac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta. \end{cases}$$

Wir beschränken uns nun auf solche Bewegungen, bei denen, wie es dem Zwecke des Kreiselkompasses entspricht, die Erhebung ϑ beständig sehr klein bleibt, vernachlässigen also ϑ neben endlichen Gröſsen, während $N\omega$ selbst als kleine Gröſse erster Ordnung anzusehen ist. Die Rechtfertigung dieser Vernachlässigung liegt in der verhältnismäſsigen Gröſse des Schweremoments, das ähnlich wie beim Foucault'schen Horizontalkreisel eine nachgiebige Führung in der Nähe der Horizontalebene bedeutet. Die Gleichungen (1) werden dann*):

$$(2\text{a})\qquad A\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = N\omega\sin\varphi + N\frac{d\psi}{dt} - P\vartheta,$$

$$(2\text{b})\qquad B\frac{d^2\psi}{dt^2} = -N\omega\cos\varphi\sin\psi - N\frac{d\vartheta}{dt}.$$

*) In Übereinstimmung mit den Grundgleichungen (4) in dem zitierten Aufsatz von O. Martienssen, Physik. Ztschr. Bd. 7 (1906) pag. 535.

Aus (2a) erhalten wir durch Differentiation und Einsetzen von $\frac{d\vartheta}{dt}$ aus (2b):

$$(3) \qquad NA\frac{d^3\vartheta}{dt^3} = (N^2 + PB)\frac{d^2\psi}{dt^2} + PN\omega\cos\varphi\sin\psi\,.$$

Andererseits wird nach zweimaliger Differentiation von (2b):

$$(3\text{a}) \qquad -NA\frac{d^3\vartheta}{dt^3} = AB\frac{d^4\psi}{dt^4} + NA\omega\cos\varphi\frac{d^2\sin\psi}{dt^2}\,.$$

Aus (3) und (3a) würden wir offenbar durch Addition eine Schwingungsgleichung vierter Ordnung für die Koordinate ψ erhalten, die also eine Überlagerung zweier Schwingungen bedeutet, und zwar, wie wir sogleich hier zufügen, einer langsamen und einer schnellen, die wir als Präcession und Nutation auffassen können. Diese zwei Schwingungen sind ihrerseits der Raumpräcession überlagert, die sich durch konstante Werte von ψ und ϑ ausdrücken mufs, und zwar nach den Gleichungen (2) durch die Werte:

$$\psi = 0; \quad \vartheta = \frac{N\omega\sin\varphi}{P}\,.$$

Die Figurenaxe weist also in dieser Gleichgewichtslage nach Norden, unter kleiner Erhebung über den Horizont, da $N\omega$ immer klein ist und P genügend grofs gewählt werden kann.

Die beiden Schwingungen betrachten wir nun gesondert. Handelt es sich um eine langsame Schwingung um die Gleichgewichtslage, so ist die Gl. (3) angenähert in bekannter Weise durch die folgende Gl. (4) zu ersetzen:

$$(4) \qquad (N^2 + PB)\frac{d^2\psi}{dt^2} + PN\omega\cos\varphi\sin\psi = 0,$$

die wegen der relativen Kleinheit von $PN\omega$ und Gröfse von N^2 thatsächlich eine langsame Schwingung darstellt.*)

Dieser langsamen Schwingung überlagern sich noch rasche Nutationen, die man bei Berücksichtigung der bisher gestrichenen Glieder erhält. Setzt man nämlich

$$\psi = \psi_0 + \psi_1\,,$$

---

*) Entnehmen wir nämlich die Gröfse der linken Seite von (3) aus (3a), so wird sie durch zwei Glieder ausgedrückt, die einzeln klein sind gegen zwei Glieder der rechten Seite. Denn es ist $AN\omega\frac{d^2\sin\psi}{dt^2}$ ohne Weiteres neben $N^2\frac{d^2\psi}{dt^2}$ zu vernachlässigen, ferner für die langsame Schwingung (4) $AB\frac{d^4\psi}{dt^4}$ von der Ordnung $\frac{A\omega}{N}PB\frac{d^2\psi}{dt^2}$, also neben $PB\frac{d^2\psi}{dt^2}$ zu vernachlässigen. Die Lösung der Gleichung (4) stellt also in der That eine Näherungslösung auch für die Gl. (3) dar.

wobei ψ_0 der Gl. (4) genügen soll, so erhält man für kleine Abweichungen ψ_1 aus (3) und (3 a) durch Elimination von ϑ die Gleichung:

$$(5)\qquad AB\frac{d^4\psi_1}{dt^4} + (AN\omega\cos\varphi\cos\psi_0 + N^2 + PB)\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + PN\omega\cos\varphi\cos\psi_0\cdot\psi_1 = 0.$$

Setzt man $\psi_1 = ae^{\lambda t}$, so mufs λ der Gleichung vierten Grades genügen:

$$(5\,a)\qquad AB\lambda^4 + (AN\omega\cos\varphi\cos\psi_0 + N^2 + PB)\lambda^2 + PN\omega\cos\varphi\cos\psi_0 = 0.$$

Bei genügend grofsem Wert von N ist diese Gleichung immer für einen grofsen negativen Wert von λ^2 erfüllt, den man hinreichend genau bei Vernachlässigung des absoluten Gliedes in (5 a) zu

$$\lambda_1^2 = -\frac{N^2}{AB}$$

erhält. Diese grofse Frequenz entspricht in der That den raschen Nutationen der Figurenaxe bei der pseudoregulären Präcession. Die anderen beiden Wurzeln von (5 a) dagegen fallen klein aus und entsprechen der vorangestellten langsamen Schwingung.

Die Übereinanderlagerung der beiden Schwingungen stellt die vollständige näherungsweise Lösung des Systems (2) dar.*) Für die raschen Nutationen bleibt, wie von der pseudoregulären Präcession her bekannt, die Schwingung in ϑ von der Gröfsenordnung derjenigen von ψ_1. Wir haben noch zu bestätigen, dafs, wegen des verhältnismäfsig grofsen Schweremoments, das die Figurenaxe in die Horizontalebene drängt, der Winkel ϑ auch für die langsamen Schwingungen wirklich immer klein bleibt. Aus (2 b) folgt:

$$-\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\cos\varphi\sin\psi + \frac{B}{N}\frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Hier ist ω an sich und $\frac{B}{N}\frac{d^2\psi}{dt^2}$ jedenfalls für die langsame Schwingung (4) klein, also bleibt ϑ zwischen engen Grenzen. Der sichtbare Schwingungscharakter wird daher eine langsame horizontale Schwingung, die von einer gleichperiodischen Vertikalschwingung von sehr kleiner Amplitude begleitet ist. Wegen der Kleinheit von $d^2\psi/dt^2$ sind nach (2 b) beide Schwingungen in der Phase um eine Viertel-

*) Wir würden natürlich unmittelbar diese Übereinanderlagerung von zwei Schwingungen erhalten haben, wenn wir in den Gleichungen (2 a) und (2 b) auch ψ als klein vorausgesetzt hätten. Doch ist diese Vernachlässigung nicht immer (z. B. für die erste Einstellung des Kreisels) berechtigt.

wellenlänge verschoben, so daſs die Kreiselspitze eine flache Ellipse beschreibt, mit der groſsen Axe im Horizont, der kleinen im Meridian. Die letztere ist aber so klein, daſs die Figurenaxe in der That wie eine horizontal schwingende Magnetnadel erscheint.

Da bei diesem Schwingungsvorgang die raschen Nutationen vernachlässigt sind, die in Wirklichkeit auch, wohl weil sie rasch abklingen, sich nicht fühlbar machen, so handelt es sich hier, unseren vorangestellten Behauptungen entsprechend, um die allerdings durch die Erddrehung ungleichförmig gemachte Horizontalpräcession. Man kann sie als langsam veränderliche reguläre Präcession auffassen, bei der das wegen der wechselnden Erhebung veränderliche Schweremoment der Impulsverlagerung das Gleichgewicht hält. Sie ist hier der Raumpräcession überlagert und daher ungleichförmig geworden, während sie bei verschwindender Erddrehung in eine gleichförmige Horizontalpräcession mit dauernd gleicher Erhebung überginge.

Nach der Gl. (4), die, in den Dimensionen einer Schwingungsgleichung geschrieben, lautet:

$$(4) \qquad \left(\frac{N^2}{P} + B\right)\frac{d^2\psi}{dt^2} + N\omega\cos\varphi\sin\psi = 0,$$

schwingt der Kreisel wie eine Magnetnadel mit der „Richtkraft“ (eigentlich dem Moment der Richtkraft) $N\omega\cos\varphi$. Der Trägheit der Nadel entspricht hier eine effektive, die aus dem Trägheitsmoment B und einer scheinbaren „Trägheit der Horizontalpräcession“, $\frac{N^2}{P}$, zusammengesetzt ist. Die letztere verschwindet für unendlich groſses P, d. h. wenn die Figurenaxe, wie beim Foucault'schen Kreisel von zwei Freiheitsgraden, in die Horizontalebene gebunden ist, und die Gl. (4) geht dann eben in die Schwingungsgleichung dieses Horizontalkreisels über (s. pag. 748, Gl. (4)). Dieses effektive Trägheitsmoment, das aber bei genügend groſsem Eigenimpuls weit über das ursprüngliche Trägheitsmoment B überwiegt, macht den Kreisel von drei Freiheitsgraden in erhöhtem Maſse unempfindlich gegenüber äuſseren Störungen von nicht zu langer Periode.

Die Schwingungsdauer der Bewegung ist für kleine Schwingungen:

$$(6) \qquad T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{N^2+PB}{PN\omega\cos\varphi}},$$

sie wächst also bei groſsen Werten des Eigenimpulses mit diesem wie $\sqrt{N/P\omega}$. Man hat daher in der Wahl des Eigenimpulses wie auch des Schweremomentes ein Mittel, die Schwingungsdauer zu regulieren, während die Gröſse von B praktisch unwesentlich ist.

Um den Kreisel unempfindlich gegen äufsere Störungen zu machen, ist eine recht lange Schwingungsdauer erforderlich, die hier durch einen grofsen Wert des Impulses erzielt wird. Dagegen wäre beim Foucault'schen Kreisel eine Verlängerung der Schwingungsdauer nur durch unliebsame Vergröfserung des Trägheitsmomentes B oder unzulässig kleine Werte des Impulses N zu erreichen.

Die Gl. (4) giebt aber bekanntlich wie beim Pendel nur für genügend kleine Anstöfse eine wirkliche Schwingung. Die vorher mehrfach gestellte Frage, für welchen Anstofs der Kreisel eine dauernd gleichsinnige Horizontalpräcession wirklich ausführt und nicht schwingend in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, ist nun mit der auch beim einfachen Pendel aufzuwerfenden Frage identisch:

„Ist die Bewegung eine periodische Schwingung oder erreicht das Pendel den höchsten Punkt und bewegt sich also beständig im gleichen Sinn?"

Die Antwort liefert hier wie dort der Energiesatz. Durch Multiplikation mit $\frac{d\psi}{dt}$ und Integration folgt aus (4):

$$\left(\frac{N^2}{P}+B\right)\left[\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0^2\right]=2N\omega\cos\varphi(\cos\psi-1), \tag{7}$$

wobei $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ die Winkelgeschwindigkeit für $\psi=0$ bedeutet. Die Figurenaxe macht keinen vollen Umlauf, d. h. erreicht den Wert $\psi=\pi$ nicht, wenn

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0^2<\frac{4PN\omega\cos\varphi}{N^2+PB},$$

d. i.

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0<\frac{4\pi}{T}. \tag{8}$$

Praktisch ist die obige Forderung aber noch viel zu weit gestellt, da bekanntlich bei grofsen Ausschlägen die Schwingungsdauer wie beim Pendel nicht mehr nach der Formel (6) zu bemessen ist, sondern viel länger, für den Grenzfall, daß $\psi=\pi$ wird, sogar unendlich ausfällt. Daher sind nur viel kleinere Ausschläge zulässig als der durch die Formel (8) gegebene.

In dem Fall einer westöstlichen Geschwindigkeitsänderung des Schiffes ist $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ unmittelbar kinematisch zu entnehmen. Es sei $\Delta\omega$ die zusätzliche Winkelgeschwindigkeit um die Erdaxe, die der Änderung der Schiffsbewegung entspricht und die wir uns der Einfachheit wegen als momentan erfolgend denken. Nach Gl. (2 a) gilt, bei Vernachlässigung der Nutationen, also des Gliedes $A\vartheta''$, nach der Geschwindigkeitsänderung:

$$N(\omega+\Delta\omega)\sin\varphi+N\frac{d\psi}{dt}-P\vartheta=0.$$

Da vor der Geschwindigkeitsänderung Gleichgewicht bestand, so war

$$P\vartheta - N\omega \sin\varphi = 0,$$

daher, weil ϑ zunächst ungeändert bleibt,

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = -\Delta\omega \sin\varphi,$$

d. h. die Figurenaxe setzt zunächst mit der ihr vor der Beschleunigung eigenen Geschwindigkeit die Raumpräcession fort und weicht entsprechend aus dem Meridian aus.

Die (allerdings zu weit gefafste) Bedingung (8), dafs der Kreisel in den Meridian zurückkehre, wird daher:

$$\Delta\omega \sin\varphi < \frac{4\pi}{T}.$$

Bei dem Anschütz'schen Instrument ist $T = 70$ min gewählt, während $\Delta\omega$ einen kleinen Bruchteil der Erdgeschwindigkeit beträgt. Nehmen wir etwa

$$\Delta\omega = \frac{1}{40}\omega = \frac{1}{40}\,\frac{2\pi}{24\cdot 60}\ \text{min}^{-1}$$

und die geographische Breite zu 45^0 an, so ist

$$\Delta\omega \sin\varphi = \frac{1}{80}\,\frac{2\pi}{24\cdot 60}\sqrt{2}\ \text{min}^{-1} = \frac{4\pi}{160000}\ \text{min}^{-1},$$

während

$$\frac{4\pi}{T} = \frac{4\pi}{70}\ \text{min}^{-1}$$

beträgt; unsere Bedingung (8) ist also durchaus erfüllt. Es besteht daher hier keine Gefahr, dafs eine west-östliche oder ost-westliche Beschleunigung zu einer Horizontalpräcession von erheblichem Ausschlag Anlafs gäbe.

Aus der Energiegleichung (7) und der gefundenen Anfangsgeschwindigkeit $(d\psi/dt)_0 = \Delta\omega \sin\varphi$ ist dieser Ausschlag, ψ_b, wirklich zu entnehmen. (Die Bezeichnung ψ_b soll auf Beschleunigung im Breitenkreis hinweisen.) Es ist zu setzen $(d\psi/dt)_{\psi=\psi_b} = 0$ und folgt dann angenähert:

$$\cos\psi_b = 1 - \frac{N}{2P\omega}\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,\Delta\omega^2,$$

oder, da es sich um einen kleinen Winkel handelt, also

$$\cos\psi_b = 1 - \tfrac{1}{2}\psi_b^2$$

gesetzt werden darf:

$$\psi_b = \Delta\omega \sin\varphi \sqrt{\frac{N}{P\omega\cos\varphi}}.$$

Der Änderung $\Delta\omega$ der Winkelgeschwindigkeit entspricht die lineare Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta v = \Delta\omega R \cos\varphi,$$

wo R den Erdradius bezeichnet. Also ist schliefslich:

$$\psi_b = \frac{\Delta v}{R} \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{N}{P \omega \cos \varphi}}.$$

Wir berechnen nun noch den ballistischen Ausschlag, der der nämlichen und ebenfalls als momentan angenommenen Geschwindigkeitsänderung Δv, aber jetzt in der Richtung des Meridians, entspricht. Eine solche äufsert sich nach pag. 852 zunächst in einem um die Knotenlinie wirkenden Moment. Ihre letzte Wirkung ist eine Horizontalpräcession unter Beibehaltung der vertikalen Erhebung, wenigstens mit grofser Annäherung; daher kehrt nach Aufhören der Beschleunigung der Kreisel schwingend in die Ruhelage zurück, ohne die Präcession fortzusetzen. Es kommt also hier nur darauf an, den ganzen Ausschlag innerhalb genügend enger Grenzen zu halten.*)

Ist Q das nach pag. 847 berechnete Moment der Beschleunigungsdrucke um die Knotenlinie, also

$$Q = -\gamma \cdot \frac{P}{g},$$

wo γ die Beschleunigung bezeichnet, so addiert sich Q in Gl. (2a) zu dem Schweremoment $P\vartheta$, während das Glied $A \cdot d^2\vartheta / dt^2$ für die Horizontalpräcession zu streichen ist. Somit wird

$$N\omega \sin \varphi - P\vartheta + Q + N\frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Die beiden ersten Glieder heben sich hier auf wegen der Gleichgewichtsbedingung der Raumpräcession, die für die in Betracht kommende Erhebung erfüllt ist, wenn die Beschleunigung nicht zu lange andauert. Es bleibt also

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{Q}{N};$$

daher wird der gesamte Ausschlag (ψ_m weist auf Beschleunigung im Meridian hin)

$$\psi_m = \int_{t_0}^{t_1} \frac{Q}{N} dt = \frac{P}{gN} \Delta v,$$

da

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_1} \gamma dt,$$

unter t_0 und t_1 die zeitlichen Grenzen der Beschleunigung verstanden.

Der Ausschlag kann also durch Wahl der Konstruktionsgröfsen und zwar gerade wieder der Schwingungsdauer, die von N/P abhängt, für alle Fälle auf ein geeignetes Mafs herabgedrückt werden. Der

*) Siehe für die folgende Rechnung Schuler, l. c. pag. 569.

vorher berechnete Ausschlag bei ost-westlicher Beschleunigung, ψ_b, wird, auf Grund der später angeführten Maſse des Anschütz'schen Apparates berechnet, für nicht zu hohe Breiten viel kleiner, nämlich weniger als 1/100 dieser Ablenkung ψ_m, ist daher in der That praktisch nicht zu berücksichtigen.

Die Stabilität des Kreisels wird noch erhöht durch die Dämpfung der Schwingungen, die wir in der Gl. (4) durch ein schematisches Zusatzglied $+ D d\psi/dt$ berücksichtigen können. Bei dem Anschütz'schen Apparat ist die eigentliche Reibung natürlich auf ein Minimum beschränkt, um die erforderliche Beweglichkeit des Kreisels nicht zu hindern. Die künstliche Dämpfung wird dort mittels einer sinnreichen Pendelvorrichtung durch ein äuſseres um die Vertikale wirkendes Moment erreicht, das durch den vom Kreisel erregten Luftstrom erzeugt wird. Die Vorrichtung ist so getroffen, daſs das Moment der Erhebung der Figurenaxe über die Gleichgewichtslage im Meridian, also nach Gl. (2a), bei Vernachlässigung von ϑ'', der augenblicklichen Präcessionsgeschwindigkeit proportional wirkt, wie es zur Dämpfung erforderlich ist. Die Anschütz'sche Anordnung hat übrigens bei Breitenänderungen eine kleine Abweichung aus dem Meridian in der Gleichgewichtslage zur Folge und in geringerem Grade auch bei Schiffsbewegungen, die bei Benutzung des Kompasses bekannt sein muſs.

Bei der technischen Ausführung ist die horizontale Gleichgewichtslage der Axe, die wir schematisch durch ein Übergewicht am inneren Ring des kardanischen Gehänges beschrieben, durch Aufhängung an einem Schwimmer erreicht. Dadurch hat der Kreisel die erforderlichen drei Freiheitsgrade, und die Reibung ist auf ein Mindestmaſs beschränkt. Fig. 134 zeigt die schematische Anordnung: Der Schwungring ist in dem Gehäuse s gelagert, dessen Form die horizontale Figurenaxe und die vertikal stehende Schwungringebene erkennen läſst. Das Gehäuse s ist durch das Verbindungsstück d mit dem Schwimmer i starr verbunden. Dieser ist in einem ringförmigen, mit Quecksilber gefüllten Gehäuse k beweglich. Das über die Ringöffnung hinübergeführte Verbindungsstück trägt, starr befestigt, oben die Kompaſsrose b; der Schwerpunkt des ganzen Systems liegt unterhalb vom Metazentrum, d. i. annähernd dem Schwerpunkt des ein-

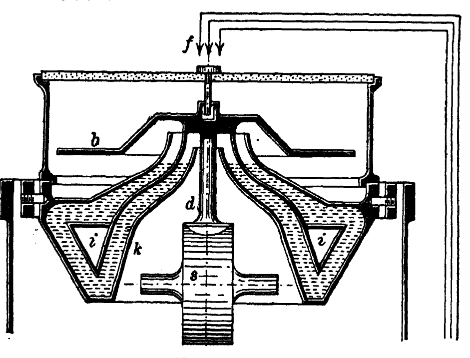


Fig. 134.
f: Stromzuführung.

getauchten Teils, so dafs die Gleichgewichtslage auch ohne Rotation stabil ist. Für die kleinen vertikalen Erhebungen des ganzen Systems um die Knotenlinie ist genügender Spielraum gelassen.

Der Durchmesser des Kreiselrades beträgt 14,8 cm*), sein Trägheitsmoment um die Rotationsaxe 136 000 gr cm^2. Die Umlaufsgeschwindigkeit wird durch einen Drehstrommotor konstant gehalten, auf 20000 Umläufen in der Minute. Daraus berechnet sich der Impuls zu $N = 28 \cdot 10^7$ gr cm^2 sec^{-1}. Das Schweremoment P beträgt $15 \cdot 10^6$ gr cm^2 sec^{-2}, entsprechend einem im Abstand 10 cm von der Axe angebrachten Übergewicht von 1500 gr. Das Moment der Richtkraft des Kompasses, $N\omega \cos\varphi$, ist dann, für die Breite von Kiel berechnet, rund 12000 gr cm^2 sec^{-2}, sein scheinbares Trägheitsmoment um die Vertikale $\frac{N^2}{P} = 52 \cdot 10^8$ gr cm^2. Neben dieser scheinbaren Trägheit der Horizontalpräcession kann das wirkliche Trägheitsmoment B, das von der Gröfsenordnung des Trägheitsmoments um die Rotationsaxe sein wird, ganz vernachlässigt werden. Die daraus sich ergebende Schwingungsdauer wird, wie schon erwähnt, etwa 70 Minuten. Alle Einzelheiten der Konstruktion, insbesondere elektrischer Antrieb, Schmierung der Kugellager usw. sind natürlich aufs sorgsamste durchgearbeitet, wie überhaupt der Apparat ein Meisterwerk der Feinmechanik darstellt.

Der Anschütz'sche Kreiselkompafs ist nicht nur in der deutschen, sondern auch in der englischen und österreichischen Marine eingeführt. Jedes Schiff hat einen an drei Stellen des Schiffes automatisch ablesbaren Kreisel und einen Reservekreisel. Es sind die Ergebnisse von mehrwöchentlichen Versuchsfahrten veröffentlicht worden, bei welchen der Schwungring ohne Unterbrechung mit konstanter Umdrehungszahl lief und etwa eine Milliarde Umdrehungen zurückgelegt hat. Die Abweichungen aus dem Meridian erreichten, nachdem sich die Kreiselaxe in den ersten zwei bis drei Stunden einmal in den Meridian eingestellt hatte, während der ganzen Zeit nur wenige Grade.

Wir selbst hatten Gelegenheit, den von Herrn Anschütz im deutschen Museum in München aufgestellten Kreiselkompafs in Thätigkeit zu sehen und seine sichere Einstellung in den Meridian in verhältnismäfsig kurzer Zeit zu beobachten. Besonders auffallend war die Ruhe der Rosenstellung auch gegenüber starken äufseren Erschütterungen. Gewisse unerwünschte ablenkende Wirkungen haben nach Angaben von Herrn Anschütz nur periodische Erschütterungen von fester Richtung, deren Axe nicht mit der Nordrichtung zusammenfällt, wie sie etwa

*) Aus einer von Herrn Anschütz uns gütigst überlassenen Konstruktionszeichnung entnommen.

durch die Rollbewegungen des Schiffes übertragen werden können. Doch ist deren Wirkung durch Aufhängen des ganzen Systems an sehr langen Federn ausgeschaltet worden.

Aus Allem ist zu entnehmen, daſs der Kreiselkompaſs in der That einen wirklich brauchbaren Ersatz für den Magnetkompaſs bietet. Allerdings dürften die vorläufig sehr hohen Kosten der Einführung bei der Handelsmarine zunächst im Wege stehen*) und sein Verwendungsgebiet der Hauptsache nach auf die Kriegsmarine beschränken, für die nach den eingangs geschilderten Verhältnissen ein nicht-magnetischer Richtungsweiser geradezu eine Lebensfrage bildet.

§ 8. **Stabilität des Fahrrads.**

Die wesentlichste Frage bei der Konstruktion der modernen Zweiräder, die nach der Energie, die der Fahrer zur Erzielung der verhältnismäſsig groſsen Geschwindigkeit aufwenden muſs, ist theoretisch vielfach behandelt worden.**) Die gröſsere Energieersparnis, sowie die leichtere Lenkbarkeit sind der wesentliche Vorteil des Zweirades vor dem Dreirade. Mit den genannten Vorzügen ist aber der Nachteil verbunden, daſs in der aufrechten Stellung der Schwerpunkt sich in labilem Gleichgewicht befindet. Um die Gleichgewichtslage bei äuſseren Störungen dennoch einhalten zu können, ist eine Erlernung des Radfahrens nötig, die allerdings durch besondere Konstruktionen des modernen Fahrrads erleichtert wird.

Tragen nun zur Stabilierung der aufrechten Lage bei genügender Geschwindigkeit auch die Kreiselwirkungen der rotierenden Räder in nennenswertem Betrage bei, indem, in der herkömmlichen Bezeichnungsweise, die Rotationsaxen bestrebt sind, ihre Richtung im Raume beizubehalten? Im Hinblick auf die geringe Masse der Räder gegenüber der Masse des ganzen, von Fahrer und Rad gebildeten Systems möchte man eine solche Wirkung bezweifeln. Und offenbar liegt es auch nicht in der Absicht des Fabrikanten, sie zu verstärken, da ja sein Bestreben dahin geht, im Interesse der Energieersparnis alle Teile des Fahrrads möglichst leicht zu bauen, während eine Vergröſserung der Radmassen der Stabilierung durch Kreiselwirkungen zu statten käme.

Jedenfalls müssen wir auch an dieser Stelle betonen, daſs die Kreiselwirkungen nur dann in Kraft treten können, wenn das System die

*) Vgl. die Diskussion zu dem eingangs zitierten Vortrag von Anschütz in der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Jahrbuch X, pag. 361.

**) Vgl. Encyklopädie der math. Wiss. Bd. IV, Nr. 9 (Walker, Spiel und Sport), pag. 149.

genügenden Freiheitsgrade besitzt. Für ein „Einrad“, d. h. eine einzelne rollende Scheibe, ist die Stabilierung zweifellos möglich, wie die theoretische Berechnung in Übereinstimmung mit der Erfahrung bestätigen würde. Bei genügender Geschwindigkeit ist die rollende Bewegung einer solchen Scheibe bei vertikaler Ebene stabil.*) Hier kann die Bewegung als fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts, verbunden mit einer Kreiselbewegung um den Schwerpunkt, aufgefafst werden, und die letztere ist ja aus den früheren Untersuchungen dieses Buches als stabil bereits bekannt.

Die relativ gröfste Ähnlichkeit mit einer einfachen Scheibe hatten die ursprünglich vielgebrauchten „Hochräder“, bei denen zu dem grofsen Vorderrad, das der einzelnen Scheibe entspricht, nur ein kleines Hinterrad tritt, um den Sitz des Fahrers zu stützen und die Lenkung zu ermöglichen. Das Hinterrad würde aber die Zahl der Freiheitsgrade des Systems um eins vermindern und dadurch die Stabilierung unmöglich machen, wenn nicht die drehbare Lenkstange die Verdrehung der Vorderradebene gegen die des Hinterrades erlaubte. Bei Feststellung der Lenkstange hätte das ganze System nur noch zwei Freiheitsgrade, das Umkippen um die horizontale Spurlinie und die mit Raddrehung verbundene Vorwärtsbewegung, und damit fiele jede Möglichkeit der Stabilierung durch die Kreiselwirkungen fort. Das heutige Zweirad nun ist nur in den Gröfsenverhältnissen von dem Hochrad verschieden; die beiden Räder sind gleich grofs und die Masse der Räder ist viel kleiner im Verhältnis zur Gesamtmasse. Daher wird auch der Einflufs der Kreiselwirkungen abgeschwächt.

Der dritte Freiheitsgrad, die Drehung um die Lenkstange, ermöglicht aber nicht nur die Kreiselwirkungen, sondern auch die Hilfen, die der Fahrer zur Aufrechterhaltung des Rades selbst geben kann und die der gelernte Fahrer unwillkürlich anwendet. Die ursprüngliche Theorie des Fahrrads, die von Rankine herrührt**), berücksichtigte nur diese, vom Fahrer selbst ausgeführte Stabilierung. Neigt sich etwa das ganze Rad auf die rechte Seite, so wird der Fahrer das Vorderrad nach eben dieser Seite drehen und dadurch das Rad zwingen, nach rechts auszubiegen. Die durch die Wendung entstehende, im Schwerpunkt angreifende Centrifugalkraft hat ein Moment um die Spurlinie, das die Radebene wieder aufrichtet. Um nun ein Überfallen nach der linken Seite zu vermeiden, mufs der Fahrer die Lenkstange wieder nach links drehen usw. Gerade weil auch diese künstliche Stabilierung die Existenz des dritten Freiheitsgrades, der Drehung um die Lenk-

*) Vgl. Carvallo, Journ. de l'Ecole polyt. 2. Ser., 5. Heft, 1900.

**) Theory of bicycle, Engineer 1869.

stange, notwendig voraussetzt, ist es schwer zu entscheiden, welcher Anteil an der Stabilierung auf die Kreiselwirkungen, welcher auf die unwillkürlichen Bewegungen des Fahrers entfällt. Gegen die bedingungslose Annahme dieser Theorie wird der Fahrer einwenden, daſs er sich durchaus nicht einer beständigen Führung der Lenkstange bewuſst ist, daſs er ja auch, ohne sie zu berühren, sicher zu fahren im Stande ist und die Lenkstange mehr, um ein Umkippen des Vorderrads zu verhindern, führt, als zur Stabilierung seiner aufrechten Lage. Er kann ja übrigens auch durch unwillkürliche seitliche Neigungen des Körpers ein Schweremoment erzeugen, das ein Umfallen verhindert.

Es bleibe dahingestellt, inwieweit die Stabilierung durch kleine Bewegungen des Fahrers selbst erreicht werden kann, darüber könnte vielleicht das Experiment entscheiden. Für alle Fälle aber wird es von Interesse sein, zu untersuchen, in welchem Grade überhaupt Eigenstabilierung des Fahrrads ohne Bewegungen des Fahrers möglich ist, und wieweit dabei Kreiselwirkungen mitspielen. Der Stabilierungsvorgang ist dann der, daſs eben die von Rankine besprochenen Hilfen teilweise die Kreiselwirkungen selbstthätig übernehmen, unterstützt durch geeignete Konstruktionen des Rades, die noch zu besprechen sind. Die Frage, wie weit das Rad ohne Zuthun des Fahrers stabiliert ist, unter der Annahme also, daſs der Fahrer starr mit dem Rahmen des Rades verbunden ist und die Lenkstange nicht in der Hand hält, ist von Whipple*) und Carvallo**) behandelt. Wir werden im Folgenden zu untersuchen haben, in welchem Grade an dieser Stabilierung die Kreiselwirkungen beteiligt sind. Dabei werden wir natürlich von allen Nebenumständen (einseitiger Antrieb durch die Pedale, Nachgiebigkeit des Pneumatik und die dadurch bedingte endliche Berührungsfläche mit dem Boden, Reibung an der Lenkstange, bohrende Reibung am Boden usw.) absehen.

Bei Whipple und Carvallo sind die allgemeinen Lagrange'schen Gleichungen erster, bezw. zweiter Art aufgestellt, die letzteren entsprechend modifiziert, da es sich um ein „nicht holonomes System" handelt, und diese für den Fall der kleinen Schwingungen um die geradlinige aufrechte Fahrt spezialisiert. Wir hoffen, den mechanischen Zusammenhang besser hervortreten zu lassen, wenn wir zur Ableitung entsprechender Näherungsgleichungen, ähnlich wie es bei den früher besprochenen Anwendungen geschehen, zu den Kräften, die im Falle der Ruhe auf das System wirken, die von der Bewegung hervorgerufenen Kreiselwirkungen und Centrifugalkräfte zufügen. Es ist

*) Quart. Journ. of Math., Nr. 120, 1899.

**) Journal de l'Ecole polytechnique, 2. Ser. 6. Heft 1901.

dabei wieder ausreichend, um die Glieder erster Ordnung in den Schwingungen zu erhalten, den vereinfachten Ausdruck (I) der Kreiselwirkung, pag. 764, zu verwenden. Wenn wir quadratische Glieder in den kleinen Schwingungen vernachlässigen, so bemerken wir noch, daſs die Gröſse der überhaupt in Betracht kommenden Ausschläge völlig innerhalb der Grenze liegen, für die diese Näherung bei der hier zu fordernden Genauigkeit ausreicht.

Die so zu erhaltenden Gleichungen stimmen mit denen von Whipple und Carvallo überein. Aus ihnen ist zu folgern: Die Bewegung ergiebt sich für kleine Geschwindigkeiten naturgemäſs als labil. Für gewisse mittlere Geschwindigkeiten aber wird die Bewegung stabil, d. h. die Schwingungen können in der Form

$$A e^{\lambda t}$$

dargestellt werden, wo λ eine komplexe Gröſse mit negativ reellem Teil bezeichnet. Whipple findet unter Zahlenannahmen, die einem modernen Fahrrad besser entsprechen, als die von Carvallo, für dieses Gebiet etwa die Geschwindigkeiten von

$$16 \text{ kmh}^{-1} \quad \text{bis} \quad 20 \text{ kmh}^{-1}$$

also Geschwindigkeiten, die leicht erreichbar sind. Für gröſsere Geschwindigkeiten wird die Bewegung, was paradox erscheinen könnte, wieder labil, doch wird sich aus der Art, wie die einzelnen Bestandteile des Systems gekoppelt sind, diese Erscheinung leicht erklären. Praktisch ist übrigens die letzte Labilität nur eine schwache und kann durch fast unmerkliche Bewegungen des Fahrers, auch ohne Berührung der Lenkstange, aufgehoben werden.

Uns interessiert hier der Beitrag der Kreiselwirkungen zu den erwähnten Resultaten. Wir werden zeigen, was bei den genannten Autoren nicht verfolgt ist, daſs bei Fortfall der Kreiselwirkungen das Gebiet der vollständigen Stabilität verschwinden würde, daſs also die Kreiselwirkungen trotz ihrer Kleinheit für die selbständige Stabilierung unentbehrlich sind.

Das Zweirad (Fig. 135) besteht im Wesentlichen aus dem Rahmen, der das in seiner Ebene gelagerte Hinterrad trägt, und der Lenkstange, deren Axe das Vorderrad trägt. Da die Lenkstange durch einen festen Tubus der Rahmenebene geführt ist, so handelt es sich um zwei ebene Systeme, die, um eine gemeinsame Axe drehbar, verbunden sind. Mit dem Rahmen denken wir uns auch den Fahrer starr verbunden. Die Drehaxe der Lenkstange ist bei den modernen Rädern nach rückwärts geneigt, und zwar so geführt, daſs ihre Verlängerung die durch den Berührungspunkt B_1 des Vorderrads gezogene Vertikale $B_1 S_1$

zwischen diesem und dem Mittelpunkt S_1 schneidet (Fig. 135), so dafs also die Verlängerung den Boden vor dem Berührungspunkt trifft. Wie Bourlet*) hervorhebt, wird durch diese Führung der Lenkstange das Umfallen des Vorderrads erschwert, wenn man sich das Hinterrad geführt oder, durch Schwerpunktsverlegung des Fahrers, bis zu einem gewissen Grade aufrecht gehalten denkt. Ein näheres Eingehen auf die Folgen dieser nicht unwesentlichen Anordnung wird hier entbehrlich sein, weil sich ihr Einflufs in unserer späteren analytischen Behandlung natürlich von selbst zeigt.

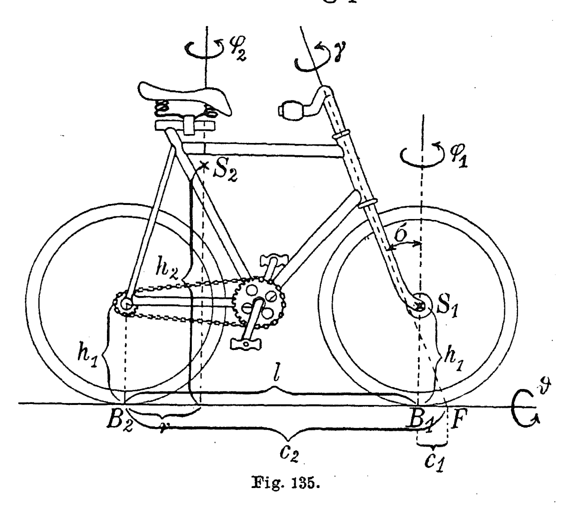


Fig. 135.

Nach dem beschriebenen kinematischen Zusammenhang zwischen Vorder- und Hinterrad können wir in irgend einem Moment etwa die Lage der Rahmenebene willkürlich vorgeben (2 Koordinaten für den Berührungspunkt, 2 Koordinaten für die Lage der Rahmenebene), ferner die Verdrehung der Vorderradebene gegen die Rahmenebene (1 Koordinate). Die Lage des ganzen Rades ist hiernach bereits bestimmt, da noch die Bedingung hinzukommt, dafs beide Räder den Boden berühren müssen, sie hat also, bei Ignorierung der cyklischen Koordinaten, die in den beiden Ebenen die Stellung der Räder um ihren Mittelpunkt festlegen, im Ganzen 5 Freiheitsgrade der Lage. Die Bewegungsmöglichkeit des Rades ist zunächst eine Neigung seiner Rahmenebene, dann eine Verdrehung des Vorderrades um die Lenkstange. Da die Bewegung der beiden Räder eine rollende sein soll, so ist durch die Lage der Vorderradebene auch seine Bewegungsrichtung bestimmt, dadurch ist dann die Bewegung der Lenkstange gegeben, und also auch die Bewegung der mit der Lenkstange verbundenen Hinterradebene. Willkürlich bleibt nur noch die Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung. Das Rad hat also 3 Bewegungsfreiheiten.

Wir lernen hier das charakteristische Merkmal von nicht holonomen Systemen**) kennen, zu denen alle rollenden Bewegungen gehören: Das

*) In dem anziehenden kleinen Buche: Nouveau traité des bicycles et bicyclettes, Paris 1898, pag. 87 ff.

**) Vgl. H. Hertz, Die Prinzipien der Mechanik, 1. Buch, Abschn. 4, Nr. 123—133.

Rad kann in jede seiner ∞^5 möglichen Lagen durch eine Aufeinanderfolge von erlaubten Bewegungen übergeführt werden, während es doch in jedem Moment nicht in jede mögliche unendlich benachbarte Lage durch eine unendlich kleine Bewegung übergeführt werden kann. Analytisch gesprochen: Die Bedingungsgleichungen zwischen den fünf Koordinaten der Lage bilden ein nicht integrables System von Differentialgleichungen.

Die Konstanten des Fahrrades seien die folgenden: M_1 die Masse des Vorderrades, dessen Schwerpunkt S_1 wir ohne wesentlichen Fehler im Mittelpunkt annehmen können. Seine Höhe, also der Radius des Rades, sei h_1 (Fig. 135). Von der Masse der Lenkstange, die wir in M_1 mit einrechnen können, haben wir bei der Schwerpunktsbestimmung abgesehen. M_2 bezeichne die Masse von Hinterrad, Rahmen und Fahrer. Deren Schwerpunkt S_2 habe die Höhe h_2 und den Abstand r von der Vertikalen durch den Berührungspunkt B_2 des Hinterrades.

Es sei ferner: A_v das Trägheitsmoment des Vorderrades um die vertikale Axe durch den Berührungspunkt B_1, A_h um die Spurlinie, B_v, B_h die entsprechenden Gröfsen des Systems: Hinterrad + Rahmen + Fahrer im Berührungspunkt des Hinterrades, B_{hv} das Deviationsmoment dieses Systems in der Radebene, ebenfalls im Berührungspunkt gemessen.

Die Lenkstange habe die Neigung σ gegen die Vertikale, ihr Fufspunkt F liege um die Länge c_1 vor dem Berührungspunkt des Vorderrades, um c_2 vor dem Berührungspunkt des Hinterrades, so dafs $c_2 - c_1 = l$ der Abstand der beiden Berührungspunkte wird.

Weiter sei ϑ_2 die Neigung der Hinterradebene gegen die Vertikale, wobei eine Neigung nach rechts im Sinne des Fahrers positiv gerechnet wird, ϑ_1 die entsprechende Neigung des Vorderrades, γ der Winkel zwischen Vorder- und Hinterrad, um die Lenkstange gemessen, positiv, wenn von oben gesehen das Vorderrad entgegen dem Uhrzeigersinn gegen das Hinterrad geneigt ist. φ_1 sei der Winkel des Vorderrades gegen die Ebene der mittleren Fahrtrichtung, um die Vertikale im gleichen Sinn gemessen wie γ, φ_2 der entsprechende Winkel beim Hinterrad. Dabei soll es sich nur um sehr kleine Winkel ϑ_1, ϑ_2, φ_1, φ_2, γ handeln, da nur dann diese Definitionen unmittelbaren Sinn haben. Unter dieser Beschränkung sind die kinematischen Formeln für die Bewegung aufzustellen.*)

Wir denken uns das Vorderrad in zwei Schritten in seine geneigte Lage ϑ_1 gebracht. Es habe zunächst die Neigung des Hinterrades, ϑ_2,

*) Für genaue Durchführung der Kinematik des Fahrrads vgl. Whipple und Carvallo l. c.

wie wenn es starr mit diesem verbunden wäre, dazu kommt die Verdrehung um die Axe der Lenkstange, γ. Letztere können wir nun (s. Fig. 135) in zwei Komponenten zerlegen, zunächst eine um die Spurlinie, $-\gamma \sin \sigma$, mit Rücksicht auf den oben definierten Sinn der Drehungen. Diese addiert sich nach den Sätzen über kleine Drehungen zur ersterwähnten Neigung des Vorderrades, so dafs also wird:

(1) $$\vartheta_1 = \vartheta_2 - \gamma \sin \sigma.$$

Die Vertikalkomponente der Drehung γ liefert dann:

(2) $$\varphi_1 - \varphi_2 = \gamma \cos \sigma.$$

Zu diesen geometrischen Beziehungen für die Lagenkoordinaten tritt noch, den obigen Bemerkungen entsprechend, eine nicht holonome Beziehung für die Bewegungskomponenten. Die mittlere Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung sei u. Wir denken uns die Lage des Rades, sowie die Bewegung u und die Drehung $\frac{d\varphi_1}{dt}$ des Vorderrades um seinen Berührungspunkt gegeben. Die gesuchte Beziehung erhalten wir, wenn wir beachten, dafs durch diese zwei Angaben die Bewegung des Fufspunktes der Lenkstange bestimmt ist, also auch die der Hinterradebene, die ja der Lenkstange folgt. Der Fufspunkt F hat (Fig. 136) in der Spur des Vorderrades die Geschwindigkeit u, senkrecht zu dieser Ebene die Geschwindigkeit $c_1 \frac{d\varphi_1}{dt}$.

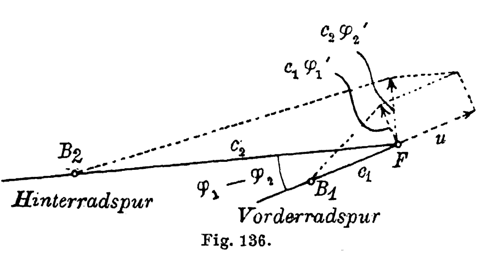


Fig. 136.

Wir bilden die Bewegungskomponente senkrecht zur Spur des Hinterrades, die mit der Spur des Vorderrades den Winkel $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi$ einschliefst. Also wird die gesuchte Komponente:

$$c_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + u \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

oder, bei Vernachlässigung quadratischer Glieder:

$$c_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + u(\varphi_1 - \varphi_2).$$

In Folge der seitlichen Drehung $\frac{d\varphi_2}{dt}$ des Hinterrades wäre die nämliche Komponente

$$c_2 \frac{d\varphi_2}{dt},$$

und es folgt daher:

(3) $$c_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = c_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + u(\varphi_1 - \varphi_2)$$

als die gesuchte nicht holonome Gleichung.

Da c_1 klein ist gegen c_2, so drückt die Bedingung (3) aus, dafs das Hinterrad im Allgemeinen nach derjenigen Seite folgen mufs, nach der das Vorderrad gegen das Hinterrad verdreht ist. Durch Betrachtung der Bewegungskomponente von F in der Spur des Hinterrades würde noch eine Bedingung für die Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung des Hinterrades folgen, die von u um Gröfsen zweiter Ordnung verschieden wird. Für unsern Zweck ist diese Bedingung unwesentlich.

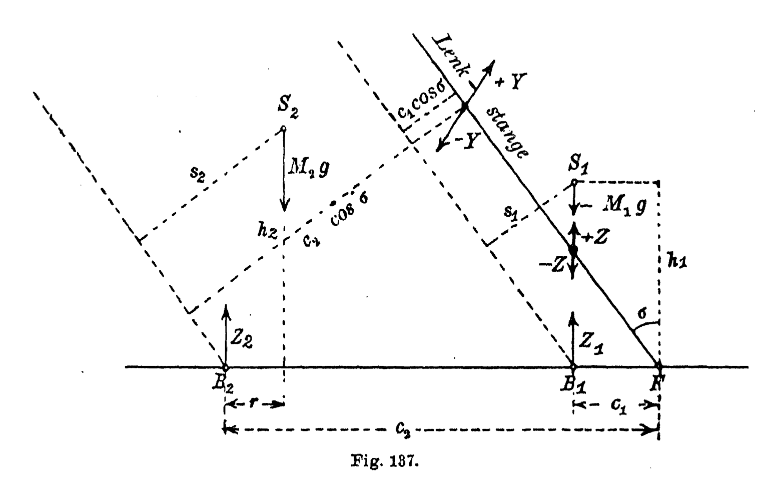


Fig. 137.

Es sind nun die auf das Rad wirkenden Kräfte und Reaktionen zu bestimmen (Fig. 137). Am Schwerpunkt S_1 greift die Schwerkraft $-M_1 g$ an, am Schwerpunkt S_2 die viel gröfsere Schwerkraft $-M_2 g$. Reaktionskräfte wirken an den beiden Berührungspunkten mit dem Boden und an der das Vorderrad und Hinterrad verbindenden Lenkstange.

Betrachten wir zunächst die Vertikalreaktionen. Wir brauchen hier nur die Reaktionen zu beachten, die bei der aufrechten geradlinigen Fahrt der Schwerkraft das Gleichgewicht halten, da diese endliche Gröfsen sind; ihre Änderungen im Falle kleiner Abweichungen von der geradlinigen Fahrt sind als kleine Gröfsen höherer Ordnung gegen die ursprünglichen Werte zu vernachlässigen.

Es handelt sich also nur um die vertikalen Kräfte, die im Falle der Ruhe die beiden Teile des Rades stützen. Nach den allgemeinen Gesetzen müfste man an der Lenkstange eine Reaktionskraft und ein Reaktionsmoment mit der Axe senkrecht zur Radebene ansetzen. Kraft und Moment können ja aber durch Verschiebung im allgemeinen zu einer Einzelkraft zusammengefafst werden, und wir erhalten so die folgenden Reaktionen (Fig. 137):

Zunächst, wie wenn das System vollständig starr wäre, eine Kraft

$$(4) \qquad Z_2 = M_2 g \frac{l-r}{l}$$

am Berührungspunkt des Hinterrades,

$$(5) \qquad Z_1 = M_1 g + M_2 g \frac{r}{l}$$

am Berührungspunkt des Vorderrades. Der Bestandteil $M_2 g \frac{r}{l}$ in Z_1 wird durch den Auflagerdruck des Rahmens auf die Lenkstange übertragen, wir haben daher Gleichgewicht in beiden Teilen des gelenkig verbundenen Systems, wenn wir noch an der Lenkstange, und zwar senkrecht über dem Berührungspunkt des Vorderrads, eine Reaktion zufügen:

$$(6) \qquad \begin{aligned} -Z &= -M_2 g \frac{r}{l} \quad \text{am Vorderrad,} \\ +Z &= M_2 g \frac{r}{l} \quad \text{am Rahmen} \end{aligned}$$

angreifend. Die Höhe ihres Angriffspunktes ist $c_1 \operatorname{ctg} \sigma$ nach Fig. 137.

Wir kommen zu den Horizontalreaktionen. Zunächst wirkt eine Reaktion $\pm Y$ an der Lenkstange senkrecht zur Radebene und daher auch senkrecht zu Z, welche von der Übertragung der Seitenbewegung zwischen beiden Teilen des Systems herrührt Ihre Gröfse, die jedenfalls von erster Ordnung ist, kann natürlich statisch nicht angegeben werden, sondern hängt vom jeweiligen Bewegungszustand ab. Die nähere Bestimmung ihres Angriffspunktes ist für unsern Zweck unwesentlich.

Schliefslich müfsten noch die Reaktionen an der Lenkstange in der Fahrtrichtung eingeführt werden, die ja eigentlich den Antrieb vom Hinterrad auf das Vorderrad übertragen. Diese sind aber im Fall der gleichförmigen geradlinigen Fahrt bei Vernachlässigung der rollenden Reibung überhaupt nicht vorhanden, im Fall kleiner Abweichungen nur von zweiter Ordnung; und da ihr Hebelarm um alle in der Vertikalebene durch den Berührungspunkt hindurchgehenden Axen von erster Ordnung ist, so sind in den später zu benutzenden Momentengleichungen ihre Momente von dritter Ordnung und kommen daher nicht in Betracht.

Ebensowenig ist zu berücksichtigen, dafs durch eine Verdrehung des Vorderrades um die Lenkstange sein Berührungspunkt seitlich verschoben wird, wie die geometrische Anschauung zeigt. Denn diese Verschiebung ist von erster Ordnung, und ihr Einflufs auf die zu betrachtenden Momente um den Berührungspunkt von zweiter Ordnung.

Wir müssen hier noch eine kinematische Bemerkung bezüglich der Lage des Schwerpunktes anschliefsen.*) Es läfst sich leicht geometrisch

*) Vgl. Bourlet, l. c. pag. 91.

zeigen, dafs bei unserer Annahme über die Lage der Lenkstange und des Schwerpunkts S_2, nämlich $c_1 > 0$, $r > 0$, durch eine Verdrehung des Vorderrads bei vertikal stehendem Hinterrad die Höhe des Schwerpunkts S_2 in erster Näherung zwar, aus Symmetriegründen, unverändert bleibt, bei Berechnung der Glieder zweiter Ordnung aber sich verringert, so dafs die Lage $\gamma = 0$ ein Maximum der Schwerpunktshöhe bedeutet. Dieses besagt, dafs zu dem Schwere-Potential, welches der einfachen seitlichen Neigung entspricht:

$$\text{const} - \frac{g}{2}\,(M_1 h_1 \vartheta_1^2 + M_2 h_2 \vartheta_2^2),$$

auch Glieder mit dem Faktor $c_1 r g M_2 \gamma^2$ und $c_1 r g M_2 \vartheta \gamma$ hinzutreten. Auf ihre genauere Berechnung können wir hier verzichten, da die ihnen entsprechenden Kraftglieder durch Vermittelung der an der Lenkstange angreifenden Reaktion Z (Gl. 6) in die schliefslichen Gleichungen von selbst eingehen werden.

Dagegen kommen, wie bei allen Schwingungen um Gleichgewichtslagen, die kinetischen Glieder, die dieser Senkung entsprechen, in unseren Näherungsgleichungen erster Ordnung nicht vor.

Aufser den bisher besprochenen, auch ohne Vorwärtsbewegung vorhandenen Kräften haben wir nun noch die scheinbaren Kräfte der Bewegung, nämlich die Centrifugalkraft und die Kreiselwirkungen, hinzuzufügen. Wir zerlegen die Vorwärtsbewegung in die Translation, mit der Geschwindigkeit u in der mittleren Fahrtrichtung, und die Rotation der Räder in ihren Ebenen, deren Winkelgeschwindigkeit $\frac{u}{h_1}$ ist. Der Impuls dieser Rotation ist für jedes der beiden Räder der nämliche und sei wieder mit N bezeichnet. Am Schwerpunkt S_2 greift dann die Centrifugalkraft

$$M_2 u \frac{d\varphi_2}{dt},$$

am Schwerpunkt S_1 die Centrifugalkraft

$$M_1 u \frac{d\varphi_1}{dt}$$

senkrecht zur Radebene an.

Von der mit der Vorwärtsbewegung verbundenen Rotation rühren die Kreiselwirkungen her, deren Gröfse und Sinn sich in gleicher Weise bestimmt, wie es im Fall der Eisenbahnwagen näher ausgeführt wurde. Einer Senkung des Rades zunächst, $\frac{d\vartheta}{dt}$, folgt eine Kreiselwirkung um die Vertikale nach:

Am Hinterrad: $\quad -N\frac{d\vartheta_2}{dt}.$

Am Vorderrad: $\quad -N\frac{d\vartheta_1}{dt}.$

Ein Senkung nach rechts etwa hat ein Moment um die Vertikale nach rechts (vom Fahrer gesehen) zur Folge.

Ferner ist die Kreiselwirkung, von der Drehung um die Vertikale $\frac{d\varphi_2}{dt}$, herrührend und um die Spurlinie wirkend, zuzufügen:

Am Hinterrad: $+N\frac{d\varphi_2}{dt}$.

Am Vorderrad: $+N\frac{d\varphi_1}{dt}$.

Die letzteren beiden Momente sind gleichgerichtet mit dem Moment der Centrifugalkraft, und da N mit u proportional ist, überhaupt nur durch einen konstanten Faktor von diesem verschieden. Da aber zur Centrifugalkraft die Masse des Fahrers und des Rahmens beiträgt, zu den Kreiselwirkungen aber nur die Masse der Räder, so sind in diesem Bestandteil jedenfalls die Kreiselwirkungen sehr unwesentlich neben den Centrifugalwirkungen, ähnlich, wie es sich im Fall der Eisenbahnwagen ergeben hatte (vgl. pag. 775).

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Impulsgleichungen für die früher besprochenen Grade der Bewegungsfreiheit ansetzen. Für die Stabilitätsfrage, die uns hier interessiert, kommen dabei nur die Gleichungen für die beiden Freiheitsgrade der seitlichen Neigung und der Verdrehung um die Lenkstange in Betracht, während die thatsächlich gleichzeitig vorhandenen kleinen Schwankungen in der Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung auf jene beiden Koordinaten nur einen Einfluſs höherer Ordnung haben.

Die Änderung des Impulses um die Spurlinie von Hinter- und Vorderrad ist kinetisch ausgedrückt, d. h. durch Masse und Beschleunigung (A_{hv} ist Null, wenn wir von der schrägen Lage der Lenkstange absehen, deren Masse an sich klein und daher oben gar nicht erwähnt ist):

beim Hinterrad: $B_h\vartheta_2'' - B_{hv}\varphi_2''$.

beim Vorderrad: $A_h\vartheta_1''$

Die Summe dieser Glieder ist gleich der Summe der um die Spurlinien wirkenden Momente, nämlich der Kreiselwirkungen um die Spurlinien und der Momente, die von Centrifugalkraft und Schwerkraft (Hebelarm h_1 bezw. h_2), endlich von den Vertikalreaktionen Z herrühren. Diese Summen dürfen wir algebraisch statt vektoriell bilden, da die Berücksichtigung des kleinen Winkels zwischen den beiden Spurlinien nur zu Gliedern zweiter Ordnung Anlaſs geben würde. Wir erhalten daher:

$$A_h\vartheta_1'' + B_h\vartheta_2'' - B_{hv}\varphi_2'' = N(\varphi_1' + \varphi_2') + u(M_1h_1\varphi_1' + M_2h_2\varphi_2')$$
$$+ M_2gh_2\vartheta_2 - Zc_1 \operatorname{ctg}\sigma\cdot\vartheta_2 + M_1gh_1\vartheta_1 + Zc_1\operatorname{ctg}\sigma\cdot\vartheta_1.$$

Diese Gleichung wird durch Einführung der Kraft Z aus (6):

$$(7)\quad \begin{cases} A_h \vartheta_1'' + B_h \vartheta_2'' - B_{hv} \varphi_2'' \\ \qquad = N(\varphi_1' + \varphi_2') + u(M_1 h_1 \varphi_1' + M_2 h_2 \varphi_2') \\ \qquad + g[M_1 h_1 \vartheta_1 + M_2 h_2 \vartheta_2 + M_2 c_1 \operatorname{ctg} \sigma \frac{r}{l} (\vartheta_1 - \vartheta_2)]. \end{cases}$$

Das letzte Glied der Gleichung (7):

$$g M_2 c_1 \operatorname{ctg} \sigma \frac{r}{l} (\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

oder nach der kinematischen Gleichung (1):

$$- g M_2 c_1 \cos \sigma \frac{r}{l} \gamma$$

verschwindet, wenn Vorder- und Hinterradebene zusammenfallen; es entspricht der schon früher bemerkten, durch die Verdrehung des Vorderrades bewirkten Senkung des Schwerpunkts S_2. Übrigens verschwindet es stets in dem Fall, dafs die Lenkstange durch den Berührungspunkt des Vorderrads geht ($c_1 = 0$), da dann, in erster Näherung, das Vorderrad frei um die Lenkstange drehbar ist, ohne Beeinflussung des Hinterrads.

Wir hätten nun noch die Impulsgleichungen z. B. für die vertikalen Axen zu bilden, wollen aber, der Einfachheit halber, statt dessen die Gleichungen für Axen parallel zur Lenkstange aufstellen, die also unter dem Winkel σ gegen die Vertikale geneigt sind. Wir wählen die Axen durch die beiden Berührungspunkte und bilden der gröfseren Übersichtlichkeit wegen zunächst die Gleichungen für die beiden Teile des Rades getrennt, in welchem Falle wir die Reaktionen an der Lenkstange zu berücksichtigen haben.

Von diesen kommt nur das Moment der Kraft $\pm Y$, die senkrecht zur Radebene angreift, und der vertikalen Kraft $\pm Z$ in Betracht; die Summe ihrer Momente ist für die angegebenen Axen, unabhängig von ihrem Angriffspunkt:

am Hinterrad: $(Y + Z\vartheta_2) c_2 \cos \sigma$,

am Vorderrad: $-(Y + Z\vartheta_1) c_1 \cos \sigma$.

Das Reaktionsmoment an der Lenkstange dagegen kann unberücksichtigt bleiben; denn da die beiden Teile um die Lenkstange frei drehbar sind, so hat dieses jedenfalls keine Komponente um die Lenkstange oder die dazu parallel gewählten Axen.

Für das Vorderrad ist die Impulsänderung in dieser Richtung, nach den Bezeichnungen von pag. 868 wieder aus den kinetischen Elementen berechnet:

$$\cos \sigma A_v \varphi_1'' - \sin \sigma A_h \vartheta_1''.$$

Die Kreiselwirkung um diese Axe setzt sich aus den pag. 872 und 873 angegebenen Kreiselwirkungen zusammen zu

$$-N(\vartheta_1' \cos\sigma + \varphi_1' \sin\sigma).$$

Aufserdem sind die Momente der Centrifugalkraft, der Schwerkraft und der Reaktionen Z und Y zu bilden. Der Arm der Centrifugalkraft sei $s_1 = h_1 \sin\sigma$, und entsprechend am Hinterrad: $s_2 = h_2 \sin\sigma + r\cos\sigma$ (vgl. Fig. 137). Wir erhalten so die Impulsgleichung:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\sigma A_v\varphi_1'' - \sin\sigma A_h\vartheta_1'' \\ &= -N(\vartheta_1' \cos\sigma + \varphi_1' \sin\sigma) - M_1 s_1 u\varphi_1' \\ &\quad - gM_1h_1 \sin\sigma\cdot\vartheta_1 - Zc_1\cos\sigma\cdot\vartheta_1 - Yc_1\cos\sigma. \end{aligned}\right.$$

Für den Fall $c_1 = 0$, wenn also die Lenkstange durch den Berührungspunkt des Vorderrades hindurchginge, wäre durch diese Gleichung und die Gleichung (7) der Bewegungsvorgang schon vollständig dargestellt. Die Reaktionen Z und Y fielen, da sie an der durch den festen Berührungspunkt des Vorderrads hindurchgehenden Lenkstange angreifend dessen Bewegung um die Lenkstange nicht beeinflussen könnten, heraus. Die seitliche Bewegung des Hinterrads andrerseits wäre durch die Bewegung des Berührungspunktes des Vorderrads gegeben. Daher würden die am Hinterrad um die Vertikale wirkenden Kreiselmomente durch die Reaktion an der Lenkstange ganz aufgehoben und kämen für das ganze System nicht in Betracht.

Bei der thatsächlichen Anordnung der Lenkstange aber, $c_1 > 0$, wird die Bewegung des Vorderrads noch durch die des Hinterrads beeinflufst, und zwar wird eine seitliche Drehung des Hinterrads gleichsinnig auf das Vorderrad übertragen, so dafs z. B. die Kreiselwirkungen beider Räder sich gegenseitig verstärken.

Es ist also noch eine Gleichung für das Hinterrad zu bilden, die ganz analog zur Gleichung (8) aufgestellt wird. Die Impulsänderung ist hier:

$$\cos\sigma(B_v\varphi_2'' - B_{hv}\vartheta_2'') - \sin\sigma(-B_{hv}\varphi_2'' + B_h\vartheta_2'')$$

und die Gleichung wird daher:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &(\cos\sigma B_v + \sin\sigma B_{hv})\varphi_2'' - (\cos\sigma B_{hv} + \sin\sigma B_h)\vartheta_2'' \\ &= -N(\vartheta_2' \cos\sigma + \varphi_2' \sin\sigma) - M_2 s_2 u\varphi_2' \\ &\quad - gM_2h_2 \sin\sigma\cdot\vartheta_2 + Zc_2\cos\sigma\cdot\vartheta_2 + Yc_2\cos\sigma. \end{aligned}\right.$$

Aus (8) und (9) haben wir die Reaktion Y zu eliminieren, d. h. die Impulsänderung um die Lenkstange selbst zu bilden. Wir berechnen also:

$$c_2\cdot(8) + c_1\cdot(9),$$

d. i.

$$(10)\quad \begin{cases} c_2[\cos\sigma A_v \varphi_1'' - \sin\sigma A_h \vartheta_1''] \\ + c_1[(\cos\sigma B_v + \sin\sigma B_{hv})\varphi_2'' - (\cos\sigma B_{hv} + \sin\sigma B_h)\vartheta_2''] \\ = -N[(c_2\vartheta_1' + c_1\vartheta_2')\cos\sigma + (c_2\varphi_1' + c_1\varphi_2')\sin\sigma] \\ - c_2 M_1 s_1 \varphi_1' u - c_1 M_2 s_2 \varphi_2' u \\ + g[-\sin\sigma(c_2 M_1 h_1 \vartheta_1 + c_1 M_2 h_2 \vartheta_2) + c_1 \cos\sigma \frac{r}{l} M_2(c_1\vartheta_2 - c_2\vartheta_1)]. \end{cases}$$

Da jedenfalls für die Bewegung nicht die absoluten Werte φ_1, φ_2, wohl aber ihre Differenz maſsgebend ist, so wollen wir aus den kinematischen Gleichungen (2) und (3) in (7) und (10) den Winkel γ zwischen Vorder- und Hinterradebene einführen. Benutzen wir die Abkürzung:

$$\gamma\cos\sigma = \varphi_1 - \varphi_2 = \psi,$$

so haben wir die Gleichungen:

$$c_2\varphi_2' - c_1\varphi_1' = \psi u$$
$$\varphi_2' - \varphi_1' = -\psi',$$

also, da $c_2 - c_1 = l$:

$$(11)\quad \begin{cases} l\varphi_1' = \psi u + c_2\psi' \\ l\varphi_2' = \psi u + c_1\psi', \end{cases}$$

somit:

$$(11\text{a})\quad \begin{cases} l\varphi_1'' = \psi' u + c_2\psi'' \\ l\varphi_2'' = \psi' u + c_1\psi''. \end{cases}$$

Mittels dieser Substitution werden die Gleichungen (7), (10):

$$\text{I}\quad \begin{cases} [A_h\vartheta_1'' + B_h\vartheta_2'' - \frac{B_{hv}}{l}(c_1\psi'' + u\psi')] \\ \qquad - \frac{N}{l}[(c_2 + c_1)\psi' + 2u\psi] \\ \qquad - \frac{u}{l}[(M_1 h_1 c_2 + M_2 h_2 c_1)\psi' + (M_1 h_1 + M_2 h_2)u\psi] \\ \qquad - g[M_1 h_1 \vartheta_1 + M_2 h_2 \vartheta_2 - M_2 c_1 \frac{r}{l}\cdot\psi] = 0, \end{cases}$$

bezw.

$$\text{II}\quad \begin{cases} \left[\frac{c_2^2}{l} A_v \cos\sigma + \frac{c_1^2}{l}(B_v\cos\sigma + B_{hv}\sin\sigma)\right]\psi'' \\ \qquad - c_2\sin\sigma A_h\vartheta_1'' - c_1(B_{hv}\cos\sigma + B_h\sin\sigma)\vartheta_2'' \\ \qquad + \left[\frac{c_2}{l}A_v\cos\sigma + \frac{c_1}{l}(B_v\cos\sigma + B_{hv}\sin\sigma)\right]u\psi' \\ \qquad + N\left[(c_2\vartheta_1' + c_1\vartheta_2')\cos\sigma + \frac{c_1^2 + c_2^2}{l}\sin\sigma\cdot\psi' \right. \\ \qquad\qquad \left. + (c_2 + c_1)\frac{u}{l}\sin\sigma\cdot\psi\right] \\ \qquad + \left[(c_2^2 M_1 s_1 + c_1^2 M_2 s_2)\frac{u}{l}\psi' + (c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2)\frac{u^2}{l}\psi\right] \\ \qquad + g\left[c_2 M_1 s_1 \vartheta_1 + c_1 M_2 s_2 \vartheta_2 - c_1 c_2 \frac{r}{l}\sin\sigma M_2\psi\right] = 0. \end{cases}$$

Die Gl. II, die Impulsgleichung für die Lenkstange als Axe, enthält natürlich im Wesentlichen die Wirkungen, die auf eine relative Verdrehung der beiden Räder gegeneinander hinarbeiten. Zunächst bezeichnet das zweite Glied der dritten Zeile die von Bourlet hervorgehobenen Wirkungen*), d. h. ein Moment, das einer Verdrehung des Vorderrads um die Lenkstange entgegenwirkt, falls c_1 positiv ist und daher das Vorderrad aufrecht erhält, wenn man sich das Hinterrad aufrecht geführt denkt. Da nämlich die Lenkstange vor dem Berührungspunkt des Vorderrads liegt, so sucht offenbar ein auf das Vorderrad vom Rahmen übertragener Druck, dessen Richtung in der Rahmenebene liegt, das Vorderrad um seinen Berührungspunkt zu drehen, nnd zwar so, dafs die beiden Radebenen sich einander nähern.

Die Kreiselwirkungen und Centrifugalwirkungen in der vierten und fünften Zeile enthalten Glieder mit ψ' und ψ. Die letzteren rühren daher, dafs nach den kinematischen Bedingungen das Vorhandensein einer Verdrehung ψ eine Krümmung der Bahnkurve des Rades fordert, die ihrerseits wieder von ablenkenden Trägheitswirkungen begleitet sein mufs. Wir weisen hier darauf hin, dafs die Glieder mit ϑ_1' und ϑ_2' in der vierten Zeile nur von den Kreiselwirkungen herrühren.

Im Falle einer seitlichen Neigung des Rades wird von der Schwere das Vorderrad nach der nämlichen Seite um die Lenkstange gedreht, nach der die erste Neigung erfolgte, da ja der Schwerpunkt vor der schräg gelagerten Lenkstange liegt. Dem entsprechen die beiden ersten Glieder der letzten Zeile. Das letzte Glied dagegen, das den Faktor $-\psi$ enthält, entspricht der schon früher erwähnten Senkung des Schwerpunkts, die durch eine Verdrehung des Vorderrads bewirkt wird, wenn c_1 positiv ist. Die Folge dieses kinematischen Zusammenhangs mufs in der That sein, dafs eine anfängliche Verdrehung durch die Schwerkraft weiter vergröfsert wird.

Die Gleichungen I, II enthalten nur mehr die Koordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \psi$. Wir fügen die kinematische Gleichung (1) zu als dritte lineare Gleichung zwischen diesen Variablen:

$$\text{III} \qquad \vartheta_1 - \vartheta_2 = -\gamma \sin\sigma = -\psi \operatorname{tg}\sigma. \text{**)}$$

Um nun die Stabilität des Systems zu untersuchen, haben wir zu setzen:

$$(12) \qquad \vartheta_1 = a \cdot e^{\lambda t}; \quad \vartheta_2 = b \cdot e^{\lambda t}; \quad \psi = c \cdot e^{\lambda t}.$$

Wir erhalten dann in bekannter Weise eine algebraische Gleichung für λ, und zwar vom vierten Grade, da 4 die Summe der Ordnungen der Differentialgleichungen I und II ist, während III keine Differentialquotienten enthält. Es existieren also zwei Schwingungen des Systems;

*) Bourlet, l. c. pag. 90. **) Unsere Gleichungen I, II, III sind lineare Kombinationen der von Whipple (pag. 323) wie der von Carvallo (pag. 100) erhaltenen.

sie sind stabil, wenn alle vier Wurzeln komplex mit nicht positivem reellen Teil sind, oder, im Falle von zwei reellen Wurzeln, diese negativ sind. Setzen wir (12) in I, II, III ein, so erhalten wir nach Forthebung des Faktors $e^{\lambda t}$ drei in a, b, c lineare homogene Gleichungen. Die Determinante Δ ihrer Koeffizienten ist 0 zu setzen; dabei ist

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc}
\begin{array}{l} A_h \lambda^2 \\ -g M_1 h_1 \end{array} &
\begin{array}{l} B_h \lambda^2 \\ -g M_2 h_2 \end{array} &
\begin{array}{l} -\frac{B_{hv}}{l} c_1 \lambda^2 - B_{hv} \frac{u}{l} \lambda \\ -\left[N \frac{c_2 + c_1}{l} + \frac{c_2 M_1 h_1 + c_1 M_2 h_2}{l} u\right] \lambda \\ -\left[N \frac{2u}{l} + \frac{M_1 h_1 + M_2 h_2}{l} u^2\right] \\ + g M_2 c_1 \frac{r}{l} \end{array} \\
\hline
\begin{array}{l} -c_2 \sin\sigma \cdot A_h \lambda^2 \\ + N c_2 \cos\sigma \cdot \lambda \\ + g c_2 M_1 s_1 \end{array} &
\begin{array}{l} -[c_1 \sin\sigma \cdot B_h + c_1 \cos\sigma \cdot B_{hv}] \lambda^2 \\ + N c_1 \cos\sigma \cdot \lambda \\ + g c_1 M_2 s \end{array} &
\begin{array}{l} \left[c_2^2 \cos\sigma \cdot \frac{A_v}{l} + c_1^2 \frac{(\cos\sigma \cdot B_v + \sin\sigma \cdot B_{hv})}{l}\right] \lambda^2 \\ \left[c_2 \frac{u}{l} \cos\sigma \cdot A_v + c_1 \frac{u}{l} (\cos\sigma \cdot B_v + \sin\sigma \cdot B_{hv})\right] \lambda \\ \left[N \frac{c_1^2 + c_2^2}{l} \sin\sigma + \frac{u}{l} (c_2^2 M_1 s_1 + c_1^2 M_2 s_2)\right] \lambda \\ + N \frac{u}{l} (c_1 + c_2) \sin\sigma + \frac{u^2}{l} (c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2) \\ - g c_1 c_2 M_2 \frac{r}{l} \sin\sigma \end{array} \\
\hline
1 & -1 & \operatorname{tg}\sigma.
\end{array}\right|$$

Die Ausrechnung dieser Determinante würde eine Gleichung der folgenden Form ergeben, wenn man noch berücksichtigt, dafs N proportional mit u ist, und unter α, β, γ, ε von u unabhängige Konstanten versteht:

$$\alpha\lambda^4 + \beta u\lambda^3 + (\gamma_1 + \gamma_2 u^2)\lambda^2 + (\delta_1 u + \delta_2 u^3)\lambda + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 u^2) = 0.$$

Damit die Stabilitätsbedingung erfüllt ist, die aussagt, dafs diese Gleichung keine Wurzeln mit positiv reellem Teil haben darf, müssen, wie leicht zu sehen, alle ihre Koeffizienten positiv sein. Andrerseits ist aber durch positive Werte der Koeffizienten die Stabilität noch nicht gesichert, sondern es ist noch weitere Diskriminantenbildung erforderlich.

Wir wollen diese weitläufigen Ausrechnungen hier nicht durchführen, sondern uns vorläufig auf die von Whipple erhaltenen Resultate berufen, die sich auf Abmessungen an einem modernen Fahrrad beziehen.

Für kleines u ist das System durch seine Schwere jedenfalls labil. Hiermit übereinstimmend ergiebt sich, dafs die Koeffizienten

$$\gamma_1,\ \delta_1 \text{ negativ sind,}$$

ε_1 dagegen ist positiv, ebenso α und β. Die Koeffizienten der höheren Potenzen von u,

$$\gamma_2 \text{ und } \delta_2, \text{ sind positiv,}$$

dagegen ist ε_2 negativ, aber absolut genommen klein gegen die übrigen Koeffizienten. Die Koeffizienten von λ und λ^2 werden daher bei wachsender Geschwindigkeit positiv, das absolute Glied dagegen wird schliefslich wieder negativ.

Und zwar wird zunächst der Koeffizient $(\delta_1 u + \delta_2 u^3)$ von λ positiv für eine ungefähre Geschwindigkeit:

$$u_1 = 12 \text{ km/h},$$

dann auch der Koeffizient $(\gamma_1 + \gamma_2 u^2)$ von λ^2 etwa für die Geschwindigkeit

$$u_2 = 14 \text{ km/h}.$$

Endlich wird der letzte Koeffizient $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 u^2)$ negativ für

$$u_3 = 20 \text{ km/h}.$$

Stabilität ist nur zwischen der Grenze u_2 und u_3 möglich, für welches Gebiet alle Koeffizienten positiv sind. Die nähere Diskussion ergiebt hier noch, dafs thatsächlich vollständige Stabilierung in dem Gebiet:

$$u_4 = 16 \text{ km/h bis } u_3 = 20 \text{ km/h}$$

eintritt. Die Rechnungen von Carvallo, die für ein älteres Modell ausgeführt sind, ergeben qualitativ dasselbe, aber für alle diese Grenzen etwas niedrigere Werte.

Wir ergänzen diese Resultate durch den Nachweis, dafs die vollständige Stabilierung ohne Kreiselwirkungen nicht möglich wäre. Zu dem Zweck berechnen wir den Koeffizienten $(\delta_1 u + \delta_2 u^3)$ von λ aus der Determinante Δ. Wenn wir zur Abkürzung das gesamte Schweremoment $M_1 h_1 + M_2 h_2$ mit Mh bezeichnen, wird dieser:

$$
\begin{aligned}
& g(-M_1 h_1 c_1 + M_2 h_2 c_2) \sin\sigma \cdot N \\
& - gMh[c_2 \cos\sigma A_v + c_1(\cos B_v + \sin\sigma B_{hv})] \frac{u}{l} \\
& - gMh(c_1^2 + c_2^2) \sin\sigma \frac{N}{l} \\
& - gMh[c_2^2 M_1 s_1 + c_1^2 M_2 s_2] \frac{u}{l} \\
& + g(c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2)\left[(c_1 + c_2)\frac{N}{l} + (M_1 h_1 c_2 + M_2 h_2 c_1)\frac{u}{l} + B_{ho}\frac{u}{l}\right] \\
& + (c_2 + c_1) \cos\sigma \cdot \frac{N}{l} [2Nu + Mhu^2 - gM_2 c_1 r]
\end{aligned}
$$

und reduziert sich noch zu:

$$
\begin{aligned}
& - gMh \cos\sigma (c_2 A_v + c_1 B_v) \frac{u}{l} \\
& + gB_{hv}\left(-M_1 h_1 \sin\sigma + M_2 r \frac{c_1}{l} \cos\sigma\right) u \\
& - gM_1 h_1 M_2 h_2 l \sin\sigma \cdot u - gM_1 M_2 h_1 c_1 r \cos\sigma \cdot u \\
& + \frac{c_2 + c_1}{l} \cos\sigma N[2Nu + Mhu^2].
\end{aligned} \tag{13}
$$

In diesem Ausdruck enthält das letzte Glied, da N mit u proportional ist, den Faktor u^3, die anderen nur den Faktor u. Von diesen überwiegen die negativen Glieder weit über das positive, da das letztere die beiden kleinen Faktoren c_1 und r enthält; daher wird für kleine Fahrtgeschwindigkeit u der ganze Koeffizient negativ. Er bliebe immer negativ, und damit die aufrechte Bewegung labil, wenn die Kreiselwirkungen unberücksichtigt blieben, also $N = 0$ angenommen würde (d. h. da die Umlaufsgeschwindigkeit proportional zu u ist, wenn das Trägheitsmoment der Räder um ihre Rotationsaxe vernachlässigt würde). Durch das letzte, von den Kreiselwirkungen herrührende Glied, das den Faktor u^3 enthält, wird der Koeffizient bei genügend grofser Geschwindigkeit positiv. (Welches die Gröfsenordnung der hier als klein und genügend grofs unterschiedenen Geschwindigkeitsintervalle ist, können wir aus den oben angegebenen Whipple'schen Zahlen ersehen. Die Grenze zwischen beiden bildet der Wert $u_1 = 12$ km/h.)

Die von Whipple gefundene Stabilität des Fahrrads für die Geschwindigkeiten von 16—20 km/h ist daher nur durch die Kreiselwirkungen der rotierenden Räder ermöglicht.

Die folgenden Bemerkungen sollen noch erklären, wie die Kreiselwirkungen in Thätigkeit treten. Der Faktor N in dem letzten Glied

$$(14) \qquad \frac{c_1 + c_2}{l} \cos \sigma N (2 Nu + Mhu^2)$$

rührt von der Kreiselwirkung $-N \frac{d\vartheta}{dt}$ um die Vertikalaxen her. Diese Wirkung, die auf eine seitliche Neigung des Rades hin das Vorderrad nach der betreffenden Seite dreht und daher das Rad zwingt, nach dieser Seite auszubiegen, ist also zur Stabilierung erforderlich. Dagegen tritt in dem Glied

$$2 Nu + Mhu^2$$

die Gröfse $2Nu$, die von der aufrichtenden Kreiselwirkung $N \frac{d\varphi}{dt}$ herrührt, nur zu dem viel gröfseren gleichgerichteten Moment der Centrifugalkraft des ganzen Systems, Mhu^2, hinzu und ist daher unwesentlich.

Die stabilierende Wirkung der Rotation beruht also darauf, dafs das Rad, wenn es sich seitlich geneigt hat, durch die Kreiselwirkung wesentlich des Vorderrades gezwungen wird, auszubiegen, und dadurch die Centrifugalkraft in Thätigkeit tritt, die das Rad wieder aufrichtet. Die eigentlich stabilierende Kraft, die die Schwerkraft überwindet, ist die Centrifugalkraft, der Kreiselwirkung fällt die Rolle der Auslösung zu. Die Stabilierungsfähigkeit nimmt übrigens wegen des Faktors $\cos \sigma$ in (14) ab mit zunehmender Schrägstellung der Lenkstange gegen die Vertikale.

Allerdings wirkt auch die am Vorderrad angreifende Schwere, zusammen mit der vom Hinterrad auf das Vorderrad übertragenen Reaktion Z dahin, dafs das Vorderrad beim seitlichen Überneigen des Systems nach dieser Seite hin ausbiegt und ruft daher eine Centrifugalkraft wach. Trotzdem ist diese Wirkung nach dem Vorhergehenden nicht im Stande, das System vollständig zu stabilieren. Es ist eben die Kreiselwirkung die einzige mit $\frac{d\vartheta}{dt}$ proportionale Kraft, während die Schwerkraft mit ϑ selbst proportional ist und daher das durch die erstere veranlafste Ausbiegen rascher der seitlichen Neigung folgt als die Schwerewirkung. Die erste Wirkung ist in der That nur um eine Viertelschwingungsdauer gegen die Senkung verschoben, die andere aber um eine halbe Schwingung.

Um auch die Gründe für das schliefsliche Labilwerden zu verstehen, betrachten wir endlich noch das von λ freie Glied $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 u^2$ in der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$. Dieses Glied enthält, wie aus der Determinante Δ leicht ersichtlich, Terme mit dem Faktor g^2, die u nicht enthalten. Die Summe dieser Terme wird positiv, nämlich:

$$(15) \qquad g^2 M_1 M_2 h_1 \sin \sigma (\operatorname{tg} \sigma h_2 l - c_1 r) + g^2 M_2^2 c_1 r \left(h_2 \sin \sigma - \frac{c_1 r}{l}\right).$$

Hier sind die beiden negativen Glieder wegen der Faktoren $c_1 r$, bezw. $c_1^2 r^2$, wesentlich kleiner als die positiven. Aufserdem treten noch Terme mit dem Faktor u^2 auf:

$$-gMh\left(\frac{c_2+c_1}{l} Nu \sin\sigma + (c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2)\frac{u^2}{l}\right)$$

$$+ g(c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2)\left[N\frac{2u}{l} + Mh\frac{u^2}{l}\right]$$

oder

(16) $$gNu\left[(M_1 h_1 - M_2 h_2)\sin\sigma + \frac{2c_1}{l} M_2 r \cos\sigma\right].$$

Hier überwiegt das negative, das Gewicht des Fahrers enthaltende Glied $-gNuM_2h_2 \sin\sigma$, während das letzte Glied wegen der kleinen Faktoren c_1 und r unbedeutend ist. Überdies überwiegen die Terme (16) bei grofsem u über die Terme (15); daher wird der ganze Koeffizient für grofse Geschwindigkeiten negativ, die Bewegung also labil.

Gehen wir nun dem eigentlichen Ursprung der Terme (16) nach; sie entsprechen den Gliedern mit dem Faktor $u^2\psi$ in der Differentialgleichung II und waren durch die Einführung der kinematischen Gleichungen

(2) $$\psi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

(3) $$c_2\varphi_2' = c_1\varphi_1' + u\psi$$

in (10) entstanden.

Diese drücken aber die anschauliche Thatsache aus, dafs im Fall einer relativen Verdrehung der beiden Radebenen gegeneinander, abgesehen von äufseren Kräften, die Hinterradebene der Vorderradebene während der Fahrt sich beständig nähert, da sie immer durch eine in dieser festgelegte Axe hindurchgeht. Denkt man sich das Vorderrad geführt, so strebt die Spurlinie des Hinterrades asymptotisch in die des Vorderrades (man kann sie also als Traktrix bezeichnen). Bei grofser Geschwindigkeit erfolgt diese Annäherung sehr rasch, so dafs für $u = \infty$ aus der kinematischen Gleichung (3) im Allgemeinen zu folgern ist, falls nicht auch beide Schwingungen des Vorderrades sehr rasch erfolgen:

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0.$$

Dann verhält das Rad sich aber so, als ob beide Teile starr verbunden wären.

Die Stabilierung durch die Kreiselwirkungen beruhte aber eben auf der relativen Beweglichkeit der beiden Räder. Sobald diese starr verbunden sind, können wir das ganze System mit einem einfachen Kreisel vergleichen, der aber nicht mehr drei, sondern wegen der doppelten Berührung mit dem Erdboden nur noch zwei Freiheitsgrade

hat, und können auf diesen Kreisel das allgemeine in § 1 ausgesprochene Prinzip anwenden, nach dem bei Unterbindung eines der Freiheitsgrade jede Möglichkeit der Stabilierung durch Kreiselwirkungen aufhört. Daraus erklärt sich die anfangs paradox aussehende Erscheinung, daſs gerade bei groſsen Geschwindigkeiten die Stabilierungsfähigkeit der Rotation beim Fahrrad versagt, während beim freien Kreisel groſse Rotationsgeschwindigkeiten der Stabilierung günstig sind. Dieser labilen Bewegung werden sich bei groſser Geschwindigkeit noch stabile Schwingungen überlagern, die man mit den Nutationen beim freien Kreisel vergleichen kann. Wegen ihrer kurzen Periode läſst sich unsere vorhergehende Schluſsweise auf sie nicht anwenden.

Übrigens ist noch zu erwähnen, daſs bei nahezu vertikal stehender Lenkstange auch bei beliebig groſser Geschwindigkeit die Bewegung stabil bliebe, da für sehr kleine Werte von σ auch der letzte Koeffizient der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ positiv bleibt. In dem Falle sind beide Eigenschwingungen rasch genug, um trotz der scheinbar starren Koppelung zwischen Vorder- und Hinterrad die Stabilität zu erhalten. Je mehr aber die Lenkstange geneigt wird, desto mehr nimmt die Stabilierungsfähigkeit der Kreiselwirkungen ab, entsprechend dem allgemeinen Verhalten, wenn die beiden nicht cyklischen Freiheitsgrade, hier Drehung um die Spurlinie und um die Lenkstange, sich einander nähern.

Wir wollen die erhaltenen Resultate noch kurz mit der Erfahrung vergleichen. Da ist zunächst noch einmal zu betonen, daſs die Annahme des mit dem Rad starr verbundenen Fahrers, die der ganzen Diskussion zu Grunde lag, praktisch nicht zu realisieren ist, da der Fahrer immer durch unwillkürliche, fast unmerklich kleine Bewegungen die Stabilität des Rades beinflussen kann. Die Hülfen, die er hier geben kann, sind zweierlei Art. Erstens kann er das Vorderrad im geeigneten Zeitpunkt ein wenig um die Lenkstange drehen und dadurch centrifugal beeinflussen. Die erforderlichen Ausdrehungen sind, wie die durch die Kreiselwirkungen selbstthätig bewirkten, sehr gering. Ferner kann der Fahrer durch seitliches Neigen des Körpers ein entgegengesetztes Schweremoment erzeugen, das das fallende Rad wieder aufrichtet. Bei freihändigem Fahren verzichtet der Radler auf die erste Wirkung und hat nur noch die Schwere zur Verfügung.

Durch die Erfahrung ist das Bestehen einer unteren Geschwindigkeitsgrenze bestätigt, unter der das freihändige Fahren unmöglich wird, offenbar deshalb, weil bei dem annähernden Wegfall der Eigenstabilierung des Fahrrades die Hülfen, die das seitliche Neigen des Körpers leisten kann, nicht ausreichen. Dagegen ist eine obere Grenze praktisch nicht merkbar. Es liegt dies wohl daran, daſs, entsprechend

näherer Zahlenrechnung von Whipple, die Labilität des Fahrrads bei nicht zu grofsen Geschwindigkeiten, solchen, die thatsächlich überhaupt möglich sind, noch sehr gering ist, so dafs schon unmerkbar schwache Neigungen des Körpers ausreichen, um die Stabilität zu erhalten.

Wenn nach dem Vorhergehenden auch die Eigenstabilierung des Fahrrades, eben wegen der leichten Hülfen, die der geschulte Fahrer geben kann, nicht gerade als erforderlich nachgewiesen ist, und deshalb auch bei der technischen Konstruktion die Frage nach der möglichsten Energieersparnis vor der nach der Stabilität steht, so ist es doch kaum von der Hand zu weisen, dafs die Kreiselwirkungen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts bei der Fahrt beitragen, wir möchten sagen, in besonders intelligenter Weise beitragen; sind sie es doch, die vermöge der Phase ihrer Wirkung zuerst ein Überfallen des Rades spüren und die dann die viel stärkeren, aber etwas langsamen Centrifugalwirkungen in den Dienst der Stabilität spannen.

§ 9. Über vermeintliche und wirkliche Kreiselwirkungen bei der Laval-Turbine.

Die geniale Konstruktion des schwedischen Ingenieurs de Laval hat die Technik mit Dampfturbinen von aufsergewöhnlicher Geschwindigkeit und besonders gutem Wirkungsgrade versehen. Der Schwerpunkt der Konstruktion liegt natürlich auf thermodynamischem und hydrodynamischem Gebiet, in der direkten Verwendung des rapide ausströmenden Wasserdampfes zum Antrieb und in der sinnreichen Formgebung der Laval'schen Düsen. Diese in den Turbinenbau eingeführten neuen Gedanken sind nicht nur für die technische Praxis, sondern auch für die technische Wissenschaft folgenreich gewesen, so dafs die Erforschung der Strömungs- und Druckverhältnisse in einer Lavaldüse jetzt ein wichtiges Spezialgebiet der technischen Thermodynamik*) ausmacht.

Was uns hier interessiert, ist indessen ein rein dynamisches Problem, welches de Laval zugleich gelöst hat. Den hohen Umdrehungszahlen der Lavalturbine (20000 bis 30000 Touren in der Minute bei kleineren Ausführungen) würde kein Lager und keine Welle gewachsen sein; jede Excentrizität des Lagers und jede Verbiegung der Welle würde vermöge der ungeheuren Centrifugulkräfte zu einer Zerstörung der ganzen Konstruktion führen. Das Mittel, das Laval hiergegen gefunden hat, ist sehr merkwürdig: er machte die Welle biegsam

*) Vgl. den Bericht von K. Prandtl in der Encyklopädie der mathem. Wiss., Bd. V, Art. 4.

(etwa fingerdick) und erreichte dadurch eine Art Selbstcentrierung der Welle, die seitdem vielfach bei besonders hohen Umlaufsgeschwindigkeiten verwandt wird. Auch bei dem Kreiselkompafs mit seinen 20000 Touren (vgl. pag. 862) wirkt die einige Millimeter dicke Welle als nachgiebig; beim Anlassen des Kreisels kann man, während derselbe durch die Geschwindigkeit von etwa 10000 Touren hindurchgeht, eine Andeutung des kritischen Schleuderns (s. unten) mit dem Ohr vernehmen. Denselben Erfolg wie durch die Nachgiebigkeit der Welle kann man durch eine Federung des Lagers erreichen. Auch dieses Konstruktionsmittel ist seit Laval vielfach in der Technik benutzt worden.

Als die Laval'sche Welle bekannt wurde, glaubte man, ihr überraschendes Verhalten auf eine Kreiselwirkung zurückführen zu sollen. So wie sich der Kreisel angeblich in eine gleichmäfsige Rotation um eine stabile Drehaxe einstelle, so solle auch das Laval'sche Turbinenrad eine stabile Rotationsform aufsuchen. Der Vergleich ist nach beiden Seiten hin irrig. Der Kreisel wechselt im Allgemeinen seine Drehaxe, indem er eine Präcession beschreibt; wenn das Turbinenrad bei zunehmender Geschwindigkeit einer gleichmäfsigen Umdrehung zustrebt, so beruht dies auf anderen und im Grunde viel einfacheren dynamischen Prinzipien*), wie auf denen der Kreiselbewegung.

Das Verhalten der biegsamen Wellen bei schneller Umdrehung wird also hier nicht eigentlich als Anwendung, sondern als Beispiel einer falschen Anwendung der Kreiseltheorie**) zu besprechen sein. Es wird am einfachsten verständlich, wenn man die Frage in die auch für technische Zwecke so wichtige Theorie der Resonanz einordnet (Nr. 1). Dafs diese Theorie ausreicht, um die wirklich beobachteten Erscheinungen des anfänglichen Schleuderns und der nachträglichen Beruhigung der Welle zu erklären, kann an einem Modell zahlenmäfsig nachgewiesen werden (Nr. 2). Die Kreiselwirkung kommt nur sekundär zur Geltung, wenn man, die einfachste Anordnung verlassend, das Turbinenrad nicht in der Mitte der Welle, sondern z. B. an deren freiem Ende, oder wenn man mehrere Turbinenräder auf derselben Axe anbringt (Nr. 3). Insofern schliefst der jetzige Paragraph an die vorangehende Behandlung des Fahrrades an, bei dem ja die Kreiselwirkung auch mehr sekundärer Art war.

---

*) Vgl. A. Föppl, Civil-Ing. pag. 333, 1895.

**) In dem klassischen Lehrbuch von A. Stodola, Die Dampfturbine, Berlin 1905, 3. Aufl., ist natürlich auch das Verhältnis zur Kreiseltheorie vollständig korrekt dargestellt. Wegen der Theorie der kritischen Geschwindigkeit vgl. Nr. 62—70 seines Buches. Weitere Litteraturangaben in Encyklopädie der mathem. Wiss. IV 27, Art. Kârman, Nr. 13 b.

1. Die Selbsteinstellung dünner Wellen.

Wir betrachten das folgende idealisierte Modell der Laval'schen Anordnung (vgl. Fig. 138 a und b).

Die dünne Welle (Länge $2l$) sei mit ihren Endpunkten P, Q fest gelagert; in ihrer Mitte trage sie das Rad R (Masse M); der Schwerpunkt desselben, der hier genau auf der Mittellinie der Welle angenommen wird (resp. von dem angenommen wird, dafs er sehr viel weniger von der Mittellinie der Welle absteht als diese von der Lagermittellinie PQ), sei S; O sei die Mitte der geometrischen Verbindung

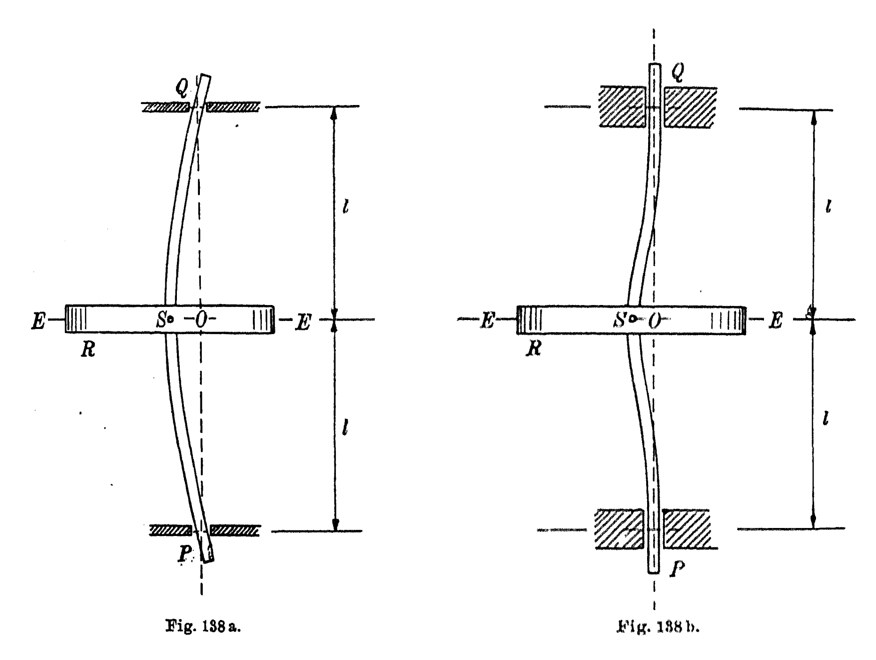


Fig. 138 a. Fig. 138 b.

der Lagerungspunkte P und Q. Da die Welle schon in der Ruhe nie genau gerade sein wird, haben wir mit einem gewissen ursprünglichen Abstande e der Punkte O und S zu rechnen. Bei der Bewegung gehe derselbe in den Abstand r über. Um die für unsere Frage unwesentliche Wirkung der Schwere auszuschalten, stellen wir die Gerade PQ am bequemsten in das Lot. Von der Masse der Welle können wir im Verhältnis zu der Masse M des Rades absehen; die Masse M denken wir in den Punkt S konzentriert. Auch können wir, wie es in der Theorie der Balkenbiegung üblich ist, den Unterschied zwischen der eigentlichen Länge der gebogenen Welle und derjenigen der Verbindungslinie ihrer Endpunkte, $2l$, vernachlässigen.

Wir haben also das folgende äufserst einfache Bild, bei dem wir nur mehr von der Mittelebene EE zwischen den Punkten P und Q zu sprechen brauchen:

Der Punkt S von der Masse M ist durch Symmetrie in der Ebene der Fig. 139 festgehalten und wird in dieser mit der gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω um den festen Punkt O umgedreht. Er steht unter dem Einflufs einer elastischen Kraft F, welche nach O hin wirkt und ihn in den Abstand e von O zu bringen sucht. Gesucht wird der thatsächliche Abstand r des Punktes S von O bei jeder gegebenen Umdrehungsgeschwindigkeit ω.

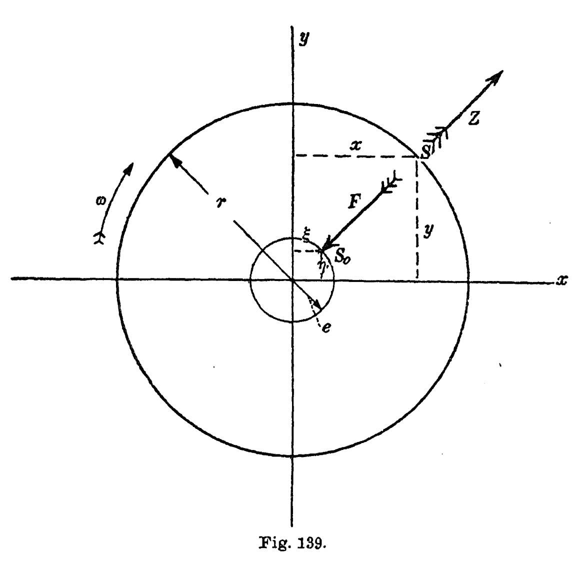


Fig. 139.

Die Kraft F hat ihren Ursprung in der Elastizität der Welle; man kann sie, bei Beschränkung auf kleine Ausbiegungen $r-e$, diesen proportional setzen, also:

(1) $F = f(r-e)$

annehmen.

Der Koeffizient f hängt von der besonderen Lagerung der Welle ab. Die beiden äufsersten Möglichkeiten, die in Fig. 138a und b dargestellt sind, wären: a) Die Lager lassen freie Beweglichkeit um die fest gedachten Endpunkte P, Q zu, *freie Auflagerung;* b) die Lager halten nicht nur die Endpunkte P, Q, sondern auch die Richtungen der Welle in ihnen fest, *Einspannung.* Diesen beiden Grenzfällen entsprechen die Werte von f

$$\text{a)}\quad f = \frac{6EJ}{l^3}, \qquad \text{b)}\quad f = \frac{24EJ}{l^3},$$

wo E und J Elastizitätsmodul und Trägheitsmoment des (z. B. als kreisförmig zu denkenden) Wellenquerschnitts um einen seiner Durchmesser bedeuten. In Wirklichkeit wird die Beweglichkeit um die Enden nicht unbehindert frei, aber auch die Einspannung wegen einer kleinen Nachgiebigkeit des Lagers nicht vollkommen sein. Es wird sich also ein mittlerer Zustand ausbilden, mit einem Werte von f zwischen den Grenzen

$$(2) \qquad 6 < \frac{l^3 f}{EJ} < 24.$$

Die elastische Kraft F wird im Zustande der gleichförmigen Umdrehung ω durch die Centrifugalkraft

$$Z = M r \omega^2$$

ins Gleichgewicht gesetzt. Daher die Gleichung:

$$f(r - e) = M r \omega^2$$

oder

(3)
$$r = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2}},$$

mit der Abkürzung

(4)
$$\omega_k^2 = \frac{f}{M}.$$

ω_k heifst die kritische Umdrehungsgeschwindigkeit.

Verfolgen wir in Fig. 140 den Verlauf von r mit wachsendem ω, so sehen wir: bei kleinem ω ist $r = e$ sehr klein; r wächst rapide, wenn sich ω dem kritischen Wert ω_k nähert; r schlägt ins Negative um, wenn ω_k überschritten wird, und nähert sich bei weiter wachsendem ω dem Werte 0. Als geeigneten Wert der Umdrehungszahl des Dauerbetriebes wählt Laval $\omega = 7\omega_k$. Nach Gl. (3) entspricht diesem eine Abweichung r von der genauen Centrierung, die nur noch den 48. Teil der anfänglichen, an sich schon kleinen Excentrizität ausmacht. In der Figur ist als Ordinate $|r|$ aufgetragen, d. h. vom Vorzeichen abgesehen worden; das negative Vorzeichen von r bei $\omega > \omega_k$ bedeutet offenbar, dafs die Welle nach der entgegengesetzten Seite durchgebogen ist wie ursprünglich für $\omega < \omega_k$. Die Figur ist völlig identisch mit der in § 5 betrachteten „Grundkurve“, Gl. (18), Fig. 125, die auch schon dort als einfachster Typus einer Resonanzkurve bezeichnet wurde; nur wurde dort das Quadrat der jetzigen Ordinate aufgetragen. Die völlige Centrierung oder Selbsteinstellung des Turbinenrades wird also wirklich asymptotisch angestrebt. In dieser Endlage werden keine Schleuderwirkungen mehr auf das Lager übertragen; die Gleichmäfsigkeit des Umlaufs ist ideal. In der Nähe der kritischen Umlaufszahl dagegen ist das Lager sowie die Welle ernstlich gefährdet. Bei den wirklichen Ausführungen sind Arretierungen der Welle vorgesehen, welche gefährliche Ausschläge

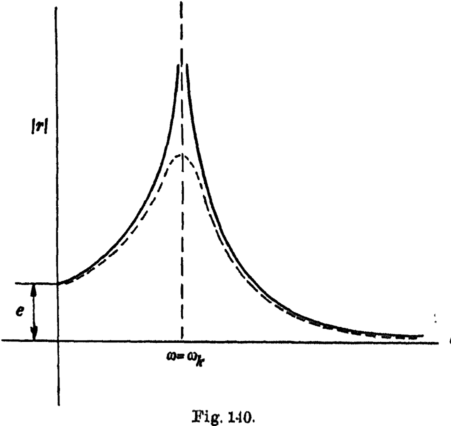


Fig. 140.

verhindern. Bei einem kleinen Modell (vgl. unten) genügt es, die Welle zwischen zwei Fingern zu halten, um sie den kritischen Zustand gefahrlos überwinden zu lassen.

Es versteht sich von selbst, dafs die vorstehende Betrachtung nur den zu jedem ω gehörigen Endzustand wiedergiebt. In Wirklichkeit wird der Übergang von einem zu einem anderen ω von Schwingungen um den Endzustand begleitet sein, die sich aber zeitlich abdämpfen. Wir kommen auf diese Schwingungen sogleich zurück. Wichtig sind sie nur für den Nachweis der Stabilität*) der gleichförmigen Umdrehung.

Um den Zusammenhang mit dem Resonanzprinzip hervortreten zu lassen, empfiehlt sich eine zweite Behandlung desselben Problems in Koordinaten. Die rechtwinkligen Koordinaten von S in Bezug auf ein durch O gelegtes festes Axenkreuz (Fig. 139) seien x, y; ξ, η seien die ebenso gemessenen Koordinaten eines Hülfspunktes S_0, nämlich desjenigen Punktes, dem S vermöge der Elastizität der Welle zustrebt, so dafs S_0 den Abstand e von O hat und auf gleichem Radiusvektor wie S liegt. Die elastische Kraft F zerlegen wir in die rechtwinkligen Komponenten F_x, F_y. Nach dem Ansatz (1) und mit Rücksicht auf den Vorzeichensinn dieser Kraft wird

$$(5)\qquad F_x = -f(x-\xi), \qquad F_y = -f(y-\eta).$$

Von der Centrifugalkraft Z haben wir jetzt abzusehen, da wir die Beschleunigungen in unseren Gleichungen direkt zum Ausdruck bringen wollen. Diese lauten jetzt:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -F_x, \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} = -F_y,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) und (5):

$$(6)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_k^2 x = \omega_k^2 \xi, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_k^2 y = \omega_k^2 \eta.$$

Diese Bewegungsgleichungen für x und y lassen sich leicht integrieren, wenn die rechten Seiten, d. h. die Koordinaten $\xi\eta$ unseres Hülfspunktes S_0, bekannt sind. Dies ist allerdings streng genommen nicht der Fall. Wir bemerken aber, dafs sie sehr kleine Gröfsen, von der Ordnung der ursprünglichen Excentrizität e sind, indem ja $\xi^2 + \eta^2 = e^2$ war. Deshalb ist es erlaubt, sie näherungsweise zu berechnen, indem man annimmt, dafs S_0 gleichförmig umläuft. Wir schreiben also, indem wir die Umlaufsgeschwindigkeit ω nennen:

$$(7)\qquad \xi = e\cos\omega t, \qquad \eta = e\sin\omega t.$$

*) Vgl. Stodola l. c. Nr. 103.

Die Gleichungen (6) nehmen dann die Form einfachster Schwingungsgleichungen an; beide Freiheitsgrade x und y sind voneinander unabhängig; beide haben dieselbe Eigenfrequenz ω_k, wie die linken Seiten der Gl. (6) zeigen. Die Terme der rechten Seiten lassen sich deuten und wirken als äufsere Kräfte von der Richtung x und y, der Periode ω und der sehr kleinen Amplitude $\omega_k^2 e$. Solche Kräfte erzeugen eine erzwungene Schwingung der x- und y-Koordinate von derselben Periode ω und im Allgemeinen sehr kleiner Amplitude, es sei denn, dafs ihre Periode mit der Eigenperiode des schwingenden Systems nahe übereinstimmt. In letzterem Falle genügen bereits kleine Kräfte, um erhebliche Ausschläge hervorzubringen: wir haben die wohlbekannte Erscheinung der Resonanz.

Aus (6) und (7) ergiebt sich, wenn man den Ansatz $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$ macht,

$$r = \frac{e\,\omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega^2},$$

also als Ausdruck der erzwungenen Schwingung:

$$\text{(8)} \qquad \left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2}} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \omega t,$$

in Übereinstimmung mit (3). Derselbe Vorgang, der in (3) als „zirkulare“ Schwingung dargestellt ist, erscheint in (8) in zwei „linear polarisierte“ zerlegt.

Dies ist aber nur eine partikuläre Bewegungsform. Das allgemeine Integral von (6) erhalten wir, wenn wir die freien Schwingungen hinzufügen. Sie ergeben sich durch Nullsetzen der linken Seite von (6) zu

$$\text{(8')} \qquad \left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = A \cos \omega_k t + B \sin \omega_k t.$$

In Wirklichkeit setzen sich den periodischen Verbiegungen der Welle erhebliche Materialwiderstände entgegen, die wir in Gl. (6) nicht berücksichtigt haben. Diese bewirken bei den freien Schwingungen ein schnelles Abklingen in der Zeit, bei den erzwungenen eine starke Reduktion der wirklichen Amplitude gegenüber der in (8) errechneten.

Wir bestätigen also das in Gl. (3) und Fig. 140 enthaltene Resultat, indem wir dasselbe folgendermafsen ergänzen: Der gleichförmige Umlauf von der Periode ω (erzwungene Schwingung) ist im Allgemeinen von Schwankungen der Periode ω_k (freien Schwingungen der biegsamen Welle) überlagert, welche bei jeder Geschwindigkeitsänderung neu angeregt werden, aber alsbald wegen innerer Widerstände abklingen. Das Amplitudenbild Fig. 140 ist mit Rücksicht auf eben diese Widerstände

im Sinne der punktierten Kurve abzuändern. *Die kritische Umdrehungszahl erweist sich als Eigenfrequenz der Welle* (und zwar als deren „Grundfrequenz"; die Oberschwingungen kommen wegen ihrer Kürze nicht in Betracht) *und der ganze Vorgang als typisches Resonanzphänomen.* Der oben erwähnte Vorzeichenwechsel in Gl. (3) beim Überschreiten der Resonanz, welcher eine zur ursprünglichen entgegengesetzte Ausbiegung bedeutete, entspricht dem wohlbekannten *Phasensprung* der Schwingung an der Resonanzstelle, vermöge dessen sie oberhalb der Resonanz hinter der Phase der anregenden Kraft um 180° zurückbleibt. Die Selbstcentrierung der Welle erklärt sich aus der allgemeinen *Trägheitseigenschaft elastischer Systeme,* die sie verhindert, in merklichem Grade Kräften nachzugehen, deren Wechselzahl wesentlich über ihrer Eigenfrequenz liegt. Im Gegensatz zu Späterem sei noch hervorgehoben, daſs diese Eigenfrequenz unabhängig davon ist, ob das Turbinenrad rotiert oder nicht. Wegen der Anordnung des Rades in der Mitte der Welle wird nämlich sein Rotationsimpuls durch die elastische Schwingung der Welle nur parallel mit sich verlagert, übt daher keine Kreiselwirkung aus und beeinfluſst den Charakter der elastischen Schwingung überhaupt nicht. In Folge dessen läſst sich die Eigenfrequenz ω_k von vornherein an der nicht rotierenden Welle experimentell ermitteln.

2. Zahlenbeispiel.

Eine quantitative Prüfung der hier entwickelten Theorie wird wesentlich darauf zu zielen haben, die Übereinstimmung der kritischen Geschwindigkeit mit der Periode der Eigenschwingung der elastischen Welle nachzuweisen. Dies gelingt an einem einfachen Versuchsmodell*), dessen Abmessungen folgende sind:

Welle (aus Silberstahl):

Dicke derselben $d = 3$ mm,

Länge $2l = 40$ cm;

Scheibe (aus Rotguſs), in der Mitte der Welle aufgekeilt:

Masse derselben $M = 1$ kg.

Antrieb der Welle von Hand mit verstellbarer Übersetzung (2, 3 oder 4). Die Masse der Welle ist gegen die der Scheibe zu vernachlässigen.

Als kritische Umdrehungszahl, d. h. als Anzahl der Umdrehungen pro Minute im Zustande maximalen Schleuderns, wurde an einem Metronom beobachtet

$$n_k = 290.$$

*) Dasselbe gehört der Sammlung für technische Mechanik der Aachener Hochschule und wurde auf Kosten des Aachener Bezirksvereins deutscher Ingenieure hergestellt.

Der theoretische Wert derselben ist nach Gl. (4):

$$n_k = \frac{30}{\pi}\omega_k = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{f}{M}}. \tag{9}$$

Die Gröfse von f, das Mafs für die elastische Federung der Welle, kann, wie es Föppl getan hat, durch direkte Ausbiegungsversuche an der Welle bestimmt werden. Wir begnügen uns mit der theoretischen Ermittelung von f und benutzen dazu zunächst die obige Formel a). In dieser kommen die Gröfsen E und J vor.

Der Elastizitätsmodul E von Stahl ist etwa

$$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg Gewicht}}{\text{cm}^2} = 2 \cdot 10^6 \cdot 981 \frac{\text{kg Masse}}{\text{cm sec}^2}.$$

Das Trägheitsmoment J des kreisförmigen Querschnitts vom Durchmesser d und dem Flächeninhalt F berechnet sich bekanntlich zu

$$J = \frac{F}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\frac{d^4}{64} = 4\ \text{mm}^4 = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{cm}^4.$$

Daraus ergiebt sich nach a) mit $l = 20$ cm:

$$f = 590 \frac{\text{kg Masse}}{\text{sec}^2}$$

und daher nach (9)

$$n_k = \frac{30}{\pi}\sqrt{590} = 230.$$

Dieser Wert stimmt der Gröfsenordnung nach mit dem beobachteten von 290 minutlichen Umläufen überein und weicht von ihm in demjenigen Sinne ab, den wir nach allgemeinen Überlegungen zu erwarten haben. In der That giebt die Formel a) nur eine untere Grenze für f und n, da die Richtungsänderung an den Enden der Welle nicht völlig frei, sondern durch die Führung im Lager etwas behindert ist. Würden beide Lager wie eine vollkommene Einspannung wirken, was nach ihrer leichten Konstruktion gewifs nicht der Fall ist, so würde nach Formel b) der Wert von f sich vervierfachen, der von n sich verdoppeln und damit erheblich über den beobachteten Wert hinausgehen.

Bemerkenswert war bei dem Modell die bedeutende Arbeit, die an der Handkurbel zu leisten war, wenn die Welle mit einer der kritischen benachbarten Tourenzahl in Umdrehung gehalten wurde. Da die Lagerreibung (Kugellager) sehr gering ist und Trägheitswiderstände im Dauerbetrieb überhaupt nicht zu überwinden sind, wird diese Arbeit lediglich zur Überwindung der inneren Reibung verbraucht, die den wechselnden Verbiegungen der Welle im Zustande des Schleuderns entgegenwirkt. Nach Gl. (3) oder (8) ist das Schleudern bei gleicher Umdrehungsgeschwindigkeit um so gröfser, je gröfser e, d. h. die ur-

sprüngliche Abweichung der Welle von der Geradheit ist. Bei einigermaſsen merklicher Krümmung kann es vorkommen, daſs es überhaupt nicht gelingt, die Welle über die kritische Geschwindigkeit hinauszubringen, trotzdem nach Maſsgabe der gewählten Übersetzung die Umdrehung über der kritischen liegen müſste. Der Übertragungsriemen von der Handkurbel nach der Welle gleitet dann auf der Riemenscheibe, indem seine Adhäsion nicht ausreicht, die bedeutenden Bewegungswiderstände des Schleuderns zu überwinden, und die Welle fährt fort, mit einer etwas unterhalb der kritischen gelegenen Geschwindigkeit zu schleudern. Besonders auffällig wurde dies, als der Handantrieb durch einen Motor von einigen P. S. ersetzt wurde; auch dieser konnte die kritische Geschwindigkeit nicht überwinden, indem der Riemen versagte. Die Beruhigung der Welle läſst sich aber sofort erreichen, wenn man in der Nähe des kritischen Zustandes die Ausbiegungen und damit den Grund für die Arbeitsverluste und Bewegungswiderstände beschränkt, wie bereits pag. 888 angegeben.

3. Das Hinzutreten von Kreiselwirkungen.

Bei alledem war von Kreiselwirkungen nicht die Rede. Diese treten erst hinzu, wenn das Turbinenrad durch das Schleudern der Welle nicht nur verschoben, sondern auch verdreht wird, oder, dynamischer ausgedrückt, wenn der Drehimpuls des Turbinenrades durch das Schleudern eine Richtungsänderung erfährt. Die Bedingungen hierfür sind besonders günstig bei der Anordnung der Fig. 141: Turbinenrad am Ende einer frei schwebenden Welle.

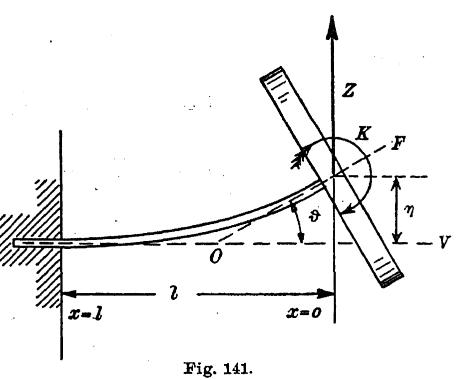


Fig. 141.

Nehmen wir auch hier einen gleichförmigen Umlauf der Welle als Endzustand an (nach Abklingen der in wechselnden Zuständen angeregten freien Schwingungen), so besteht dieser, kreiseltheoretisch gesprochen, in einer gleichmäſsigen Präcession des Turbinenrades, bei der seine Normale, die Figurenaxe OF, unter einem gewissen Winkel ϑ gegen die hier horizontal gestellte Axe OV geneigt ist. Die Kreiselwirkung K dieser Präcession steht auf OV und OF senkrecht, wirkt also um die Normale zur Zeichenebene, wenn sich OF gerade in der Zeichenebene befindet, und zwar nach der Regel vom gleichsinnigen Parallelismus in solchem Sinne, daſs sie die

Welle nach ihrer ursprünglichen Lage zurückzulenken strebt, ebenso wie die elastischen Widerstände und umgekehrt wie die Centrifugalkraft Z.

Wir fragen jetzt nach der Gleichgewichtsfigur unserer Welle, wenn sie durch die an ihrem Ende ($x = 0$) wirkende Einzelkraft Z, sowie durch das Kräftepaar K belastet ist. Diese Frage gehört in die Theorie der Balkenbiegung. Die Grundgleichung dieser Theorie lautet bekanntlich

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\mathfrak{M}, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{M}$ das sog. Biegungsmoment für den Querschnitt x, hier

$$\mathfrak{M} = K - Zx, \tag{11}$$

und y die von der ursprünglichen Lage (der x-Axe OV) aus gerechnete Ausbiegung bedeutet. Aus (10) und (11) ergiebt sich durch Integration:

$$\begin{cases} EJ\frac{dy}{dx} = -Kx + Z\frac{x^2}{2} + A, \\ EJy = -K\frac{x^2}{2} + Z\frac{x^3}{6} + Ax + B. \end{cases} \tag{12}$$

Die Integrationskonstanten A, B sind durch die Grenzbedingungen an der Einspannungsstelle (für $x = l$) zu berechnen, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad y = 0 \quad \text{für} \quad x = l.$$

Dieselben liefern:

$$A = +Kl - Z\frac{l^2}{2},$$

$$B = +K\frac{l^2}{2} - Z\frac{l^3}{6} - Kl^2 + Z\frac{l^3}{2}$$

$$= -K\frac{l^2}{2} + Z\frac{l^3}{3}.$$

Diese Konstanten bedeuten nach (12) zugleich die Gröfse von

$$EJ\frac{dy}{dx} \text{ und } EJy \text{ für } x = 0.$$

Schreiben wir nach Fig. 141 $-\vartheta$ für dy/dx und η für y am Ende der Welle, so haben wir:

$$\begin{cases} EJ\vartheta = -Kl + Z\frac{l^2}{2}, \\ EJ\eta = -K\frac{l^2}{2} + Z\frac{l^3}{3}. \end{cases} \tag{13}$$

Durch η und ϑ sowie die Umlaufsgeschwindigkeit ω drückt sich Z und K aus. Einerseits ist

$$Z = M\eta\omega^2,$$

andererseits nach Gl. (III)*) in § 1, wenn wir $\sin\vartheta$ durch ϑ, $\cos\vartheta$ durch 1 ersetzen, die Ablenkungsgeschwindigkeit $d\psi/dt$ des Eigenimpulses N in unserem Falle mit der Umlaufsgeschwindigkeit ω identifizieren und den Eigenimpuls zu $N = C\omega \cos\vartheta = C\omega$ berechnen:

$$K = (C - A)\vartheta\omega^2.$$

Die Gleichungen (13) ergeben daher folgende Bestimmungsgleichungen für ϑ und η:

$$(14)\qquad \begin{cases} \left(1 + \frac{(C-A)\,\omega^2 l}{EJ}\right)\vartheta - \frac{M\omega^2 l^2}{2EJ}\eta = 0, \\ + \frac{(C-A)\,\omega^2 l^2}{2EJ}\vartheta + \left(1 - \frac{M\omega^2 l^3}{3EJ}\right)\eta = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern im Allgemeinen als einzig mögliche Gleichgewichtsform der Welle: $\vartheta = \eta = 0$, d. h. keine Ausbiegung. Das mufsten wir erwarten. Denn wir haben hier die Welle stillschweigend in ihrer ursprünglichen Form als vollkommen gerade vorausgesetzt — anders wie in Nr. 1, wo wir von Anfang an mit einer gewissen Excentrizität e rechneten. Daher verschwindet zu Anfang die Centrifugalkraft sowohl wie die Kreiselwirkung und der gerade Zustand bleibt theoretisch erhalten.

Trotzdem liefert Gl. (14) bereits eine Andeutung für die möglichen Ausbiegungen der Welle bei der kritischen Geschwindigkeit. Diese Gleichungen sind nämlich für beliebige Werte η, ϑ miteinander verträglich in dem besonderen Falle, wo ihre Determinante verschwindet. Dies liefert die folgende Bedingungsgleichung für ω^2:

$$(15)\qquad \left(1 + \frac{(C-A)\,\omega^2 l}{EJ}\right)\left(1 - \frac{M\omega^2 l^3}{3EJ}\right) + \frac{M\omega^2 l^3}{2EJ}\,\frac{(C-A)\,\omega^2 l}{2EJ} = 0,$$

oder, wenn wir die gleichbenannten Koeffizienten (sec²)

$$(16)\qquad c = \frac{(C-A)\,l}{EJ}, \quad m = \frac{Ml^3}{EJ}$$

einführen:

$$cm\omega^4 - 12\left(c - \frac{1}{3}m\right)\omega^2 = 12.$$

Die positive Wurzel dieser Gleichung heifse ω_k^2. Sie berechnet sich zu:

$$(17)\qquad \omega_k^2 = \frac{1}{cm}\left(6c - 2m + \sqrt{12cm + (6c - 2m)^2}\right).$$

Bei dieser Umdrehungsgeschwindigkeit sind, wie wir sagten, die Abweichungen η, ϑ beliebig und es kann ein unbegrenzt starkes Schleudern

*) Wir müssen hier die genaue Formel (III) statt der Näherung (II) benutzen, weil die Drehaxe nicht mit der Figurenaxe des Turbinenrades, sondern mit der „Vertikalen" OV der Fig. 141 zusammenfällt. Die Rotation um die Figurenaxe ergibt sich daher zunächst gleich $\omega\cos\vartheta$, kann aber, wie im Text geschehen, durch ω ersetzt werden.

der Welle eintreten; vorher und nachher dagegen ist die Welle wie zu Anfang genau centriert. Wir erhalten also für η, ϑ die graphische Darstellung der Fig. 142: Im Punkte $\omega = \omega_k$ der Abscissenaxe eine unbestimmte Ordinate, überall sonst die Ordinate Null. Man kennt die Bedeutung dieses etwas paradox klingenden Resultates von anderen Problemen der Mechanik her (Knickungsvorgang, kleine Pendelschwingungen). Es besagt nichts anderes, als dafs beim Überschreiten von $\omega = \omega_k$ eine plötzlich zu- und dann wieder abnehmende Ausbiegung stattfindet, die in Wirklichkeit natürlich völlig bestimmt ist und von der ursprünglichen Krümmung der Welle abhängt, bei unserem Ansatz aber unbestimmt bleiben mufste, weil wir die ursprüngliche Krümmung vernachlässigt haben. Das wirkliche Ausbiegungsdiagramm wird also die in der Figur punktierte Gestalt haben; es schmiegt sich bei abnehmender ursprünglicher Krümmung immer mehr in die von uns berechnete rechtwinklige Ecke hinein. Das wirkliche Ausbiegungsdiagramm hat also durchaus die Gestalt der früheren Fig. 140.

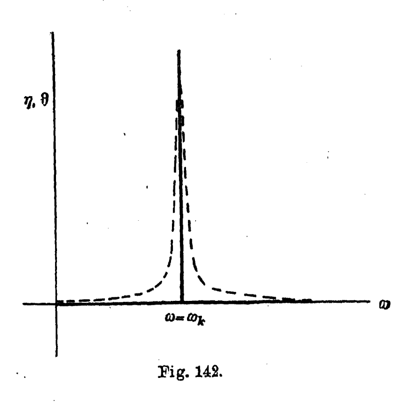


Fig. 142.

Wir können dies leicht im Einzelnen nachweisen, wenn wir die jetzige Rechnung durch Einführung der ursprünglichen Krümmung ergänzen und sie dadurch derjenigen unter Nr. 1 anpassen.

Die ursprüngliche Krümmung denken wir uns hier etwa durch den Einflufs der Schwere auf das überhängende Turbinenrad hervorgerufen, also durch eine Kraft Q, die im Punkte $x = 0$ angreift. Bei der Bestimmung ihres Momentes wollen wir uns aber die Ungenauigkeit gestatten, dafs wir dieses für die ganze Umdrehung konstant gleich Qx setzen.

Wir sehen also weiterhin von der speziellen Vorstellung der Schwere ab und ersetzen sie durch eine für unsere Zwecke besonders bequeme schematisierte Kraft, die sich mitdreht und die im Prinzip dasselbe bewirkt, wie die Schwere, nämlich durch eine von Anfang an vorhandene Krümmung die horizontale Gleichgewichtslage unmöglich zu machen.

Diese vereinfachende Annahme bringt es mit sich, dafs wir die vorigen Gleichungen (10) bis (13) direkt übernehmen können, wobei wir nur $Z + Q$ statt Z einzutragen haben. Die Gleichungen (13) lauten daher jetzt:

$$EJ\vartheta = -Kl + (Z + Q)\frac{l^2}{2}, \qquad EJ\eta = -K\frac{l^2}{2} + (Z + Q)\frac{l^3}{3},$$

und statt der Gleichungen (14) erhält man:

$$\left(1+\frac{(C-A)\,\omega^2 l}{EJ}\right)\vartheta-\frac{M\omega^2 l^2}{2EJ}\eta=\frac{Ql^2}{2EJ},$$

$$+\frac{(C-A)\,\omega^2 l^2}{2EJ}\vartheta+\left(1-\frac{M\omega^2 l^3}{3EJ}\right)\eta=\frac{Ql^3}{3EJ}.$$

Hieraus ergeben sich für jeden Wert von ω ganz bestimmte, im Allgemeinen endliche Werte von ϑ und η. Unendlich werden dieselben nur dann, wenn die Determinante der linken Seite verschwindet. Dies führt aber wieder genau auf die Bedingung (15) und auf die kritische Umlaufzahl $\omega=\omega_k$. Bei abnehmendem Q, d. h. zunehmender Geradheit der ursprünglischen Wellenform, gehen die eben genannten endlichen Ausbiegungen in Null über, während die unendliche Ausbiegung für $\omega=\omega_k$ den unbestimmten Wert $0\cdot\infty$ annimmt, ganz im Sinne unserer Fig. 142.

Von Interesse ist es für uns, die relative Wichtigkeit der Kreiselwirkung („zusammengesetzte Centrifugalkraft“ im Sinne Coriolis) zu derjenigen der gewöhnlichen Trägheitswirkung (einfache Centrifugalkraft) beim Schleudern der Laval-Welle festzustellen. Dies geschieht am einfachsten, wenn wir zusehen, in welchem Maſse die kritische Umdrehungszahl infolge der Kreiselwirkung in die Höhe gesetzt wird. (Eine Erhöhung, nicht eine Erniedrigung der kritischen Umdrehungszahl wird die Kreiselwirkung bedingen, da sie ja nach der Regel des gleichsinnigen Parallelismus der Ausbiegung entgegenarbeitet, also scheinbar die Steifigkeit vermehrt.)

Sehen wir zunächst von der Kreiselwirkung ab, indem wir $C=0$ und $A=0$ setzen, also den Radius des Turbinenrades sehr klein nehmen. Der entstehende Wert der kritischen Geschwindigkeit heiſse ω_{k0}. Dieser entsteht aus (17), wenn wir $c=0$ setzen. Da aber dann (17) in der Form 0/0 erscheint, müssen wir eine Entwicklung vornehmen. Es ist bei kleinem c mit Rücksicht auf das positive Vorzeichen der Wurzel in (17)

$$\sqrt{12cm+(6c-2m)^2}=|6c-2m|\left(1+\frac{6cm}{(6c-2m)^2}+\dots\right)$$
$$=2m-6c+\frac{6cm}{2m-6c}+\dots,$$

also nach (17) und (16) für $c=0$:

$$\omega_{k0}^2=\frac{3}{m}=\frac{3EJ}{Ml^3}.$$

Derselbe Wert wäre auch direkt aus der zweiten ursprünglichen Gl. (14) zu entnehmen gewesen, die für $C=0$ mutatio mutandis mit Gl. (4) übereinstimmt.

In Wirklichkeit sind A und C nicht gleich Null, sondern für eine dünne Scheibe vom Radius r ist:

$$A = \frac{M}{4} r^2, \qquad C = \frac{M}{2} r^2,$$

also nach (16)

$$c = \frac{m}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2.$$

Nehmen wir beispielsweise den Durchmesser der Scheibe gleich der Länge unserer Welle l, so ergiebt sich:

$$c = \frac{m}{16}, \qquad 2m - 6c = \frac{13}{8} m$$

und nach (17)

$$\omega_k^2 = \frac{2}{m}(-13 + \sqrt{217}) = \frac{3,4}{m}.$$

Wir haben also

$$\omega_k^2 : \omega_{k0}^2 = 4 : 3,4; \quad \omega_k : \omega_{k0} = 1,09 : 1,$$

d. h. die kritische Umdrehungszahl wird durch die Kreiselwirkung um 9% heraufgesetzt. Der Einfluſs ist also mehr sekundärer Art.

Kreiselwirkungen werden nicht nur bei der frei schwebenden Lavalwelle auftreten, sondern immer dann, wenn das Schleudern der Lavalwelle mit einer Richtungsänderung des rotierenden Turbinenrades verbunden ist. So z. B. auch bei einer beiderseits gelagerten Welle, wenn sich das Rad nicht gerade in der Mitte der Welle befindet oder wenn mehrere Räder auf derselben Welle angeordnet sind. Die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit führt dann auf kompliziertere Gleichungssysteme, über die man alles Wissenswerte in dem Stodola'schen Werke nachlesen kann. Neue dynamische Gesichtspunkte treten dabei nicht auf; immer handelt es sich um das Gleichgewicht von Centrifugalkräften und Kreiselmomenten an der elastischen Welle. Die numerische Bedeutung der Kreiselwirkung wird dabei in dem Maſse zurücktreten, als die durch das Schleudern bedingten Richtungsänderungen des Turbinenrades je nach seiner Anordnung in der Nähe der Wellenmitte geringer werden. Der Fall der freischwebenden Welle stellte bereits ein Maximum für den Einfluſs der Kreiselwirkung dar.

Zum Schluſs möge erwähnt werden, daſs das Schleudern auch bei diesen allgemeineren Anordnungen zwar als Resonanzphänomen gedeutet werden kann, daſs aber diese Auffassung insofern ihre praktische Bedeutung verliert, als jetzt die Eigenschwingungsdauer der Welle durch die Rotation beeinfluſst wird und daher die kritische Umlaufszahl nicht von vornherein durch Versuche am nicht rotierenden System bestimmt werden kann, ähnlich wie die Schwingungszahl eines Kreisels von seiner Umlaufszahl abhängt. Denn sobald das Turbinenrad rotiert, ist die

ursprüngliche Biegungsschwingung des Systems keine mögliche freie Bewegung mehr, da die Kreiselwirkungen wie äufsere Momente wirken, die die Schwingungsdauer verändern. Zu jeder Umlaufsgeschwindigkeit wird sich jetzt eine eigene freie Schwingungsdauer ergeben; da diese aber im Allgemeinen nicht mit der Umlaufsdauer übereinstimmt, so mufs die Welle wechselnde Verbiegungen durchmachen. Eine solche freie Schwingung ist auch der durch die Gl. (14) und (15) dargestellte Bewegungszustand, sie ist vor den anderen nur dadurch ausgezeichnet, dafs bei ihr Umlaufsdauer und Schwingungsdauer zusammenfallen, so dafs die Welle als Ganzes rotieren kann. Das Kennzeichen der kritischen Umlaufsgeschwindigkeit ist also auch hier die Resonanz zwischen Umlaufszahl und freier Schwingungszahl.

§ 10. **Vermischte Anwendungen.**

Ohne irgendwie Vollständigkeit anzustreben, wollen wir in diesem Schlufsparagraphen solche Anwendungen der Kreiseltheorie zusammenstellen, welche wir nicht ausführlich besprechen können, teils weil uns der Gegenstand nicht hinreichend geklärt erscheint, teils weil er uns zu weit in technische Einzelheiten führen würde. Wir beginnen wie in § 2 mit den Kreiselwirkungen bei Fahrzeugen (Einschienenbahn), berichten über einige nautische Kreiselprobleme und schliefsen mit dem Problem der Ballistik, das unter allen technischen Anwendungen der Kreiseltheorie am frühesten in Angriff genommen ist und bis zum heutigen Tage wohl am wenigsten befriedigend gefördert werden konnte. Eine Übersicht des Inhalts giebt die folgende Tabelle:

A. Einschienenbahnen.
   1. Schwebebahn.
   2. Monorailsystem.
   3. System Brennan und Scherl.

B. Nautische Anwendungen.
   4. Raddampfer.
   5. Turbinendampfer.
   6. Der gyroskopische Horizont.
   7. Bemerkungen zur Aeronautik.

C. Ballistik.
   8. Das dynamisch-hydrodynamische Problem.
   9. Die allgemeinen Erfahrungsthatsachen der Ballistik und die Rolle der Kreiselwirkungen.

A. Einschienenbahnen.

Die Überlegungen des § 2 zeigen deutlich, daſs die technischen Schwierigkeiten bei Schnellbahnen — von den ihrer Einführung entgegenstehenden und sehr maſsgeblichen wirtschaftlichen Schwierigkeiten braucht hier nicht die Rede zu sein — hauptsächlich mit der zweischienigen Anlage unserer Bahnen zusammenhängen. Die beiden Schienenstränge stellen zwei kinematische Führungsbedingungen dar, die wegen des notwendigen Spielraums der Räder im Allgemeinen nicht in gleichem Maſse wirken, und das Fahrzeug hat zwischen beiden sozusagen einen dynamischen Kompromiſs zu schlieſsen. Daher das abwechselnde Anlaufen der Räder gegen die eine oder andere Schiene und das Schlingern der Wagen, die Entlastung der einen oder anderen Schiene durch Centrifugal- und Kreiselwirkungen und die fortgesetzte Verschlechterung des Geleises, namentlich auch die lästige Notwendigkeit der Überhöhung der äuſseren Schiene in einer Kurve, die nur für eine mittlere Geschwindigkeit berechnet und nie vollständig durchgeführt werden kann. Alle diese Übelstände fallen bei einer *Einschienenbahn* von selbst fort. Man kann drei Typen derselben unterscheiden:

1. Stabile Anordnung, Schiene oberhalb des Wagenschwerpunktes, *Schwebebahn*, Patent Lange.

2. Wenig stabile Anordnung, Schiene in der Nähe des Wagenschwerpunktes, *Monorailsystem*, Patent Behr.

3. Instabile Anordnung, Schiene unter dem Wagenschwerpunkt, Patent Brennan und Scherl.

1. Schwebebahn.

Der erste Typus ist in Elberfeld-Barmen ausgeführt; er wird von vielen Sachverständigen als Ideal einer technisch-vollkommenen Bahn angesehen: die Centrifugalwirkungen können sich in dem seitlichen Ausschwingen des Fahrzeugs ohne Schaden für das Material ausgleichen, ebenso die Kreiselwirkungen der Antriebs- und Führungsräder, die hier wegen des kleinen Radradius übrigens ziemlich klein sein werden. Man kann bemerken, daſs beide Wirkungen sich hier nicht addieren wie bei der gewöhnlichen Zweischienenbahn, sondern subtrahieren, was man als eine erwünschte Nebenerscheinung dieser Anordnung ansehen kann. In der That: das Moment der Centrifugalwirkung um die Schiene wirkt, wenn der Schwerpunkt *unter* der Schiene liegt, im entgegengesetzten Sinn wie bei der gewöhnlichen Anordnung, das Moment der Kreisel-

wirkung aber im gleichen Sinn wie bei jener, also (vgl. § 2) im umgekehrten Sinne wie das Moment der Centrifugalkraft.

Wir bestimmen etwa die Ausschwingung α des Wagens (Abweichung seiner Mittelebene von der Vertikalen) beim Durchfahren einer Kurve vom Krümmungsradius R. Dabei mufs das Moment der Schwere $\mathfrak{M}$ durch das Moment der Centrifugalwirkung H und durch die Kreiselwirkung K ins Gleichgewicht gesetzt werden:

$$\mathfrak{M} = H + K. \tag{1}$$

Nun ist, wenn M die Masse des Fahrzeugs und h die Höhe des Schwerpunktes unter der Schiene bedeutet:

$$\mathfrak{M} = Mgh \sin\alpha.$$

Ferner wird, wenn v die Geschwindigkeit in der Kurve ist,

$$H = M\frac{v^2}{R} h \cos\alpha.$$

Für die Kreiselwirkung K haben wir Gl. (II) des § 1 zu benutzen, da die Figurenaxe der umlaufenden Räder, die die Kreiselwirkung hervorbringen, um den Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ gegen die Vertikale, d. i. die Axe der hinzukommenden Drehung (Drehungsgeschwindigkeit v/R), geneigt ist. Wir haben also:

$$K = -N\frac{v}{R}\cos\alpha;$$

das negative Vorzeichen entspricht der vorangehenden Bemerkung über den umgekehrten Sinn der Kreiselwirkung und der Centrifugalwirkung. Es ist aber, wie in § 2 Gl. (2),

$$N = mvr,$$

wenn m die auf den Umfang reduzierte Masse aller Räder, r ihren gemeinsamen Radius bedeutet, also:

$$K = -m\frac{v^2}{R} r \cos\alpha.$$

Unsere Gleichgewichtsbedingung (1) liefert daher

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{gR}\left(1 - \frac{m}{M}\frac{r}{R}\right). \tag{2}$$

Bei den Probefahrten in Barmen-Elberfeld wurde die Geschwindigkeit in Kurven so weit gesteigert, dafs Ausschwingungen bis zu 25° vorkamen; wie die vorstehende Formel zeigt, würde der Ausschwingungswinkel ohne Kreiselwirkung noch ein klein wenig gröfser ausfallen müssen.

2. Monorailsystem.*)

Dasselbe war für die Strecke Manchester-Liverpool als Schnellbahn mit 150 km pro Stunde projektiert; doch ist in den letzten Jahren über das Zustandekommen dieses Projektes nichts bekannt geworden. Eine Versuchsstrecke war bei Gelegenheit der Brüsseler Ausstellung 1897 mit 135 km pro Stunde in Betrieb und lieferte befriedigende Resultate.

Das Monorailsystem verdient den Namen „Einschienenbahn“ nicht in dem Maſse wie die Schwebebahn, weil seitlich unter der Tragschiene noch beiderseits je zwei Führungsschienen angeordnet sind. Der Wagen bildet eine Art Sattel um die Tragschiene, um die er mit schwer gehaltenen Fortsetzungen heruntergreift, und stützt sich auf die Tragschiene von oben her mit einem Rad von senkrechter Ebene. In Kurven oder wenn das Gleichgewicht sonst nach der einen oder anderen Seite hin gestört ist, legt er sich gegen die Führungsschienen dieser Seite mit zwei Rädern von horizontaler Ebene. Eine solche Störung des Gleichgewichts ist deshalb zu gewärtigen, weil der Schwerpunkt des ganzen Wagens nur wenig von der Laufschiene absteht, der Wagen sich also statisch nahezu im indifferenten Gleichgewicht befindet.

Bleibt diese geringe Stabilität nun auch bei voller Fahrt bestehen oder findet hier eine ausgiebigere Stabilierung des Gleichgewichtes statt, eine Stabilierung, die offenbar nur durch eine Kreiselwirkung der umlaufenden Räder hervorgebracht werden könnte? Nach den Angaben des Konstrukteurs, nach denen die seitlichen Führungsschienen nur ausnahmsweise in Kurven beansprucht würden, und nach den Ergebnissen der Versuchsfahrten, deren Ruhe gerühmt wurde, müſste man dieses voraussetzen. An sich ist es ja nicht undenkbar, daſs die umlaufenden Massen von Rad und Motor gegen ein Umkippen des Wagens nach der Seite zunächst mit einer kleinen Drehung um die Vertikale und durch Vermittelung dieser mit einem Kreiselmoment um die Schiene reagieren, welches den Wagen wieder aufrichtet, wie dies durch die Formeln (IV) des § 1 schematisch beschrieben wird. Da die Kreiselwirkung mit dem Quadrat der Fahrgeschwindigkeit wächst, wäre Erhöhung der Stabilität bei Erhöhung der Geschwindigkeit zu erwarten (auſser gegenüber den Centrifugalwirkungen, die ebenfalls mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachsen). Indessen ist hierbei wieder die ganz wesentliche Bedingung der erforderlichen drei Freiheitsgrade (vgl. pag. 767) zu beachten. Wenn durch mangelnden Spielraum die Ausdrehung der Räder um die Vertikale gehindert bezw. durch Reibung sehr erschwert wird, so wird auch die

*) Vgl. z. B. Centralblatt der Bauverwaltung 1899, pag. 550.

stabilierende Wirkung unmöglich bezw. stark herabgesetzt. Ob unter diesen Umständen eine merkliche Stabilierung überhaupt noch zu Stande kommt, kann bezweifelt werden. Sicher ist nur, dafs das nach Gl. (IVe) in § 1 berechnete stabilisierende Moment des Idealfalles viel zu grofs ausfallen würde. Ziemlich wahrscheinlich scheint es, dafs bei grofser Geschwindigkeit die Stabilierung leichter zu Stande kommen kann, wie bei kleiner, da hier für die seitlichen Ausdrehungen der Räder weniger Spielraum beansprucht wird und die Reibung gegen solche Ausdrehungen nicht in demselben Mafse mit der Geschwindigkeit wachsen dürfte wie die Kreiselwirkung selbst.

Wir hätten diese in ihrer Unbestimmtheit wenig befriedigenden und wegen der geringen praktischen Bedeutung des Monorailsystems wenig wichtigen Betrachtungen hier kaum gebracht, wenn sie nicht eine passende Überleitung zu dem Stabilierungssystem beim instabilen Typus der Einschienenbahn bildeten. Was im bisherigen Falle nur beiläufig und unter ungünstigen Umständen durch die umlaufenden Räder bewirkt (oder gegebenenfalls auch nicht bewirkt) wird, leistet im folgenden Falle eine ausdrückliche Kreiselvorrichtung in ausgedehntem Mafse und unter wohlerwogenen Bedingungen.

3. System Brennan und Scherl.

Die Frage nach der praktischen Ausführbarkeit der Stabilierung eines völlig labilen Einschienenwagens durch eingebaute Kreisel ist schon mehrfach erörtert worden. Aber erst in der allerjüngsten Zeit sind Versuche in der Öffentlichkeit vorgeführt worden, und zwar gleichzeitig im November 1909 von L. Brennan in England und A. Scherl in Berlin. Nach den Berichten haben sie zu günstigem Ergebnis geführt, über die nähere Anordnung der Kreiselkonstruktion ist aber noch nichts bekannt geworden, abgesehen von früheren kurzgehaltenen Patentschriften*), die aber die jetzige Form nur noch in Umrissen treffen werden. Wir beschränken uns daher auch hier auf einige allgemein gehaltene theoretische Überlegungen.**)

Dafs thatsächliche Stabilierung eines an sich labilen Zustandes durch Kreiselwirkungen möglich ist, haben wir mehrfach besprochen, z. B. bei der Diskussion der aufrechten Kreiselbewegung. Im Prinzip wird es sich auch bei der Stabilierung des Einschienenwagens um nichts anderes als diese aufrechte Kreiselbewegung handeln, die hier natürlich in modifizierter Form erscheint. Denken wir uns z. B. ähn-

*) Patent Brennan, D. R. P. 174402.

**) Dieselben schliefsen sich teilweise an einen Aufsatz von A. Föppl an: „Zur Theorie des Kreiselwagens der Einschienenbahn“, Elektrotechn. Ztschr. 1910, 4.

lich wie im Falle des Schlick'schen Schiffskreisels im Einschienenwagen einen Kreisel in einem Rahmen angeordnet, der um eine Queraxe des Wagens drehbar ist, so dafs wie beim Schiffskreisel die Figurenaxe in der Mittelebene des Wagens schwingen kann und in der Mittellage vertikal steht.*) Der Kreisel hat dann offenbar die nämlichen Freiheitsgrade wie ein einfacher Kreisel im kardanischen Gehänge: Den inneren Ring vertritt der Kreiselrahmen, der um die Queraxe drehbar ist, den äufseren der Wagen, um die Schiene drehbar. Nur sind die Trägheitsmomente und Schweremomente der beiden nichtcyklischen Freiheitsgrade hier voneinander unterschieden.

Die erste Forderung zur Kreiselstabilierung, dafs zwei nichtcyklische Freiheitsgrade vorhanden sein müssen, ist hier, im Gegensatz zum Monorailsystem, ausgiebig erfüllt. Aber der allgemeine Thomsonsche Satz, den wir pag. 771 anführten, fordert noch mehr: Es genügt nicht eine gerade Anzahl von Freiheitsgraden zur cyklischen Stabilierung eines labilen Zustandes, es ist vielmehr eine gerade Anzahl labiler Freiheitsgrade erforderlich.**) Daraus können wir sofort entnehmen: Soll der Kreisel in der beschriebenen Anordnung den Wagen wirklich stabilieren können, so mufs er sich selbst, abgesehen von den Kreiselwirkungen, im labilen Zustande befinden, sein Schwerpunkt mufs also oberhalb der Aufhängeaxe des Rahmens liegen. Beim Schiffskreisel lag im Gegensatz dazu der Schwerpunkt unterhalb der Aufhängeaxe ($h > 0$), da das Schiff von Anfang an stabil ist ($H > 0$). Auf den allgemeinen Beweis des Thomson'schen Satzes brauchen wir nicht näher einzugehen, da er ganz analog verläuft, wie der folgende Beweis im speziellen Falle des Einschienenwagens.

Um an die früher verwendeten Bezeichnungen beim Schiffskreisel anzuknüpfen, sei Q das Gewicht des Wagens, J sein Trägheitsmoment, um die Schienenkante gemessen, H die Höhe seines Schwerpunkts. Ferner sei q das Gewicht des Kreisels und Rahmens, j sein Trägheitsmoment um die Aufhängeaxe, h die Höhe seines Schwerpunkts über der Aufhängeachse, die wir jetzt als positiv voraussetzen, endlich sei N der Impuls des Kreisels. Die seitlichen Aus-

---

*) Dies ist nur eine von verschiedenen möglichen Anordnungen. Bei der ursprünglichen Ausführung von Brennan (vgl. unten) fällt die Mittellage des Kreisels mit der Queraxe des Wagens zusammen. Föppl unterscheidet (vgl. die vorige Anm.) drei Hauptlagen, empfiehlt aber die im Text besprochene Anordnung als die einfachste.

**) Ob Stabilierung möglich ist, wenn einer der Freiheitsgrade indifferent ist, hängt von spezielleren Voraussetzungen ab. Wir werden hierauf noch zurückkommen.

schläge des Wagens sollen durch den Winkel ψ, die Ausschläge des Kreiselrahmens durch ϑ gemessen werden, und wir setzen in der üblichen Weise voraus, dafs zur Entscheidung der Stabilität die Untersuchung kleiner Ausschläge ψ und ϑ ausreichend ist. Von Reibungseinflüssen sehen wir vorläufig ab.

Durch seitliche Neigungen des Wagens wird nun der Kreisel in Schwingungen versetzt. Auf die beiden Freiheitsgrade wirken hierbei, wie im Falle des Schiffskreisels, aufser den Schweremomenten noch die „Kreiselwirkungen"

$$K = N\frac{d\vartheta}{dt}$$

auf den Wagen,

$$k = -N\frac{d\psi}{dt}$$

auf den Kreiselrahmen. Überhaupt können wir ohne Weiteres die Bewegungsgleichungen (5) von § 4 mit den entsprechenden Änderungen wegen der ursprünglichen Labilität der Freiheitsgrade ψ und ϑ übernehmen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} J\frac{d^2\psi}{dt^2} - QH\psi - N\frac{d\vartheta}{dt} = 0,\\ j\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - qh\vartheta + N\frac{d\psi}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Man braucht nur diese Gleichungen mit den Gleichungen (5) pag. 367 zu vergleichen, um die Analogie zur aufrechten Kreiselbewegung zu erkennen.

Als Lösung haben wir einzusetzen:

$$\psi = A\cdot e^{xt};\quad \vartheta = a\cdot e^{xt},$$

erhalten also:

$$(3\,a)\qquad \begin{aligned} A(Jx^2 - QH) - aNx = 0,\\ a(jx^2 - qh) + ANx = 0 \end{aligned}$$

und daraus für x die Gleichung:

$$(4)\qquad (Jx^2 - QH)(jx^2 - qh) + N^2x^2 = 0.$$

In dieser sind nun alle Koeffizienten positiv, kann also die Wurzel x^2 zwei negative, somit x vier rein imaginäre Werte annehmen, wenn

$$N^2 - QHj - qhJ > 0.$$

Diese Forderung wird ergänzt durch die eigentliche Stabilitätsbedingung, die durch die Diskriminantengleichung gegeben ist:

$$(N^2 - QHj - qhJ)^2 > 4\,QHqhJj.$$

Im Falle des aufrechten Kreisels, für den wir $QH = qh = P$, $J = j = A$ setzen können, geht letztere über in das oft benutzte Kriterium für den starken Kreisel:

$$N^2 > 4AP.$$

Das von x^2 freie Glied in (4), $(-QH)(-qh)$, ist positiv, als Produkt zweier negativer Glieder, es würde aber negativ werden, wenn einer der beiden Freiheitsgrade an sich stabil wäre, also entweder H oder h einen negativen Wert hätte. *Also nur wenn beide Freiheitsgrade stabil oder beide Freiheitsgrade labil sind, kann die Bewegung des Systems vollständig stabil sein.* Ebenso wird im allgemeinen Fall von mehr als zwei nichtcyklischen Freiheitsgraden das letzte Glied der entsprechenden Gleichung das Produkt der zu den einzelnen Freiheitsgraden gehörigen generalisierten Kräfte, es wird nur dann positiv, wenn eine gerade Anzahl von labilen Freiheitsgraden vorhanden ist. Hierin liegt der Beweis des allgemeinen Thomson'schen Satzes.*)

Von besonderem Interesse ist noch der Grenzfall, in dem einer der beiden Freiheitsgrade, bei uns etwa die Bewegung des Kreiselrahmens, an sich indifferent wäre ($h = 0$). Sicher ist für den Fall des Einschienenwagens eine solche Anordnung ebenfalls auszuschließen. Denn die charakteristische Gleichung (4) hätte in dem Fall immer zwei oder bei Berücksichtigung der Dämpfung (s. unten Gl. (6)) eine verschwindende Wurzel. Das zugehörige Integral $\vartheta = a + bt$, wo a und b Konstanten sind, würde aussagen, daſs der Kreiselrahmen sich beständig gleichsinnig weiter drehen und sich daher von der Vertikalen beliebig entfernen könnte. Bei Berücksichtigung der Dämpfung lautet das entsprechende Integral $\vartheta = a$ und besagt, daſs hier der Kreiselrahmen, nachdem ein ursprünglicher Schwingungszustand durch Reibung aufgezehrt ist, in einer beliebigen Stellung stehen bleiben würde, z. B. auch in der wagrechten, in der die Kreiselaxe parallel zur Schienenkante liegt. Offenbar verliert dann aber der Kreisel jede Stabilierungs-

---

*) In dieser allgemeinen Form gilt der Satz übrigens nur für holonome Systeme. Denn der oben für den Fall von zwei Freiheitsgraden durchgeführte Beweis setzt voraus, daſs man alle Lagen des Systems durch voneinander unabhängige Koordinaten ausgedrückt hat und daſs die Schwingungsgleichungen für diese Lagenkoordinaten in der Lagrange'schen Form wirklich angesetzt sind, eine Bedingung, die im nichtholonomen Fall bekanntlich nicht erfüllbar ist. Das Fahrrad z. B. könnte auch stabiliert werden, wenn der Schwerpunkt des Vorderrades unterhalb der Lenkstange läge und also nur ein labiler Freiheitsgrad, nämlich die Neigung des Rahmens um die Spurlinie, vorhanden wäre. Doch bleibt natürlich auch im nicht holonomen Fall 2 die Mindestzahl der nichtcyklischen Freiheitsgrade, die Stabilierung zulassen.

fähigkeit. Die gleiche Bemerkung machten wir übrigens auch schon bei der Stabilierungsuntersuchung in § 1, IV. Dort nahmen wir ein auf die Koordinate ψ wirkendes Moment Ψ an, das der Schwere des Wagens bei der Einschienenbahn entspricht, dagegen war das Gleichgewicht in Bezug auf die Koordinate ϑ völlig indifferent. Wir fanden, dafs der Kreisel zwar das System stabilieren kann (in dem behandelten Beispiel den äufseren Ring des kardanischen Gehänges), dafs seine Stabilierungsfähigkeit aber mit der Zeit abnimmt und schliefslich ganz verschwindet.

Anders liegen die Verhältnisse bei einem Gyrostaten (vgl. pag. 771) oder noch einfacher bei einer aufrecht rollenden Scheibe, bei der ebenfalls der eine Freiheitsgrad, nämlich die Drehung um die Vertikale, indifferent ist. Dafs auch dort die charakteristische Gleichung bei hinreichend kleiner Reibung zwei verschwindende Wurzeln hat, besagt, dafs die Scheibe unter konstanter Neigung eine Präcession beschreiben kann, bei der z. B. der Schwerpunkt einen Kreis durchläuft. Da dort die Axe des wirkenden Schweremoments aber nicht raumfest ist, sondern beständig auf der Figurenaxe senkrecht steht, so kann die Figurenaxe nie mit der Axe dieses Moments zusammenfallen, vielmehr behält die Rotation, die nahezu um die Figurenaxe erfolgt, ihre Stabilierungsfähigkeit dauernd ungeschwächt bei. Dasselbe gilt von der Anordnung des Thomson'schen Gyrostaten. *Der Grenzfall der indifferenten Anordnung wird daher in diesen Fällen als stabil zu bezeichnen sein.*

In dem Beispiel des § 1 ist das äufsere Moment raumfest, die Figurenaxe strebt nach der Regel des gleichsinnigen Parallelismus, sich der Axe des äufseren Moments zu nähern. Die Stabilität nimmt daher, wie erwähnt, dauernd ab und ist nur für eine gemessene Zeit praktisch gesichert. Für die Zwecke des Torpedos z. B. ergab sich diese zeitlich begrenzte Stabilität als ausreichend; für die Zwecke und unter den Verhältnissen der Einschienenbahn dagegen wäre sie völlig unzureichend. *Der Grenzfall der indifferenten Anordnung des Kreiselrahmens ist daher bei der Einschienenbahn als labil sicher auszuschliefsen.*

Bisher haben wir von Reibungseinflüssen abgesehen; in diesem Falle war bei hinreichendem N nach Analogie mit dem aufrechten Kreisel die Stabilität des Einschienenwagens vorauszusehen. Wesentliche Schwierigkeiten aber wird bei der wirklichen Ausführung naturgemäfs die Reibung machen. Berücksichtigen wir sie durch die üblichen Zusatzglieder in den Gleichungen (3), ohne damit mehr sagen zu wollen, als dafs es sich um Momente handelt, die immer mit der Schwingungsrichtung gleichzeitig ihr Vorzeichen umkehren. Die Gleichungen (3) werden dann etwa:

$$J\frac{d^2\psi}{dt^2} + W\frac{d\psi}{dt} - QH\psi - N\frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

$$(5) \qquad j\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + w\frac{d\vartheta}{dt} - qh\vartheta + N\frac{d\psi}{dt} = 0$$

und an Stelle der Gl. (4) tritt jetzt die folgende:

$$(Jx^2 + Wx - QH)(jx^2 + wx - qh) + N^2x^2$$
$$(6) \qquad = Jjx^4 + (Jw + jW)x^3 + (N^2 - QHj - qhJ + Ww)x^2$$
$$- (QHw + qhW)x + QHqh = 0.$$

Damit Stabilität möglich ist, müssen wieder alle Koeffizienten dieser Gleichung positiv sein. Man sieht aus dem Koeffizienten von x: Wenn beide Freiheitsgrade gedämpft sind, ist keine stabile aufrechte Bewegung möglich. *Es ist erforderlich, daſs die Schwingung des einen Freiheitsgrades nicht gedämpft, sondern beschleunigt wird.* Welcher der beiden Freiheitsgrade hierzu ausgewählt wird, ist prinzipiell unwesentlich. Für die Praxis dürfte aber nur die eine Anordnung in Frage kommen, bei der die Bewegung des Kreiselrahmens beschleunigt wird. Vom technischen Standpunkte aus ist wohl die Idee, den Wagen bei einem seitlichen Kippen dadurch stabilieren zu wollen, daſs man ihn weiter im Sinne des Kippens antreibt, doch zu gewagt.

Eine Vorrichtung, die die Kreiselrahmenschwingung beständig beschleunigt, ist in dem Brennan'schen Patent in der That vorgesehen. Dort ist also die Gröſse w als negativ zu denken. Dann kann der Koeffizient von x in Gl. (6) in der That positiv werden, aber andrerseits würde dadurch, falls nicht zugleich W genügend groſs und positiv ist, der Koeffizient von x^3 negativ ausfallen. *Es reicht also nicht aus, den einen Freiheitsgrad zu beschleunigen, der andere muſs gleichzeitig in entsprechendem Maſse gedämpft sein.* Setzen wir $w = -w_1$, so sind nämlich die Bedingungen zu erfüllen:

$$qhW - QHw_1 \leqq 0,$$
$$(7) \qquad jW - Jw_1 \geqq 0.$$

Beide können nebeneinander bestehen, wenn

$$\frac{qh}{j} < \frac{QH}{J}\,^{*)}$$

gewählt ist. Und zwar wird nach der zweiten Ungleichung (7), wegen des überwiegenden Schwere- und Trägheitsmoments des Wagens über das des Kreisels, W einen viel gröſseren Wert haben müssen als w_1. Nach der ersten Ungleichung (7) aber reicht eine verhältnismäſsig geringe

*) D. h. bei umgekehrt gedachter Schwererichtung, wo die Wagen- und Kreiselschwingung beide stabil wären, muſs die Frequenz der Kreiselrahmenschwingung kleiner sein als die des Wagens.

Beschleunigung der Kreiselrahmenschwingung aus; was die Dämpfung der Wagenschwingung betrifft, so wird diese schon von selbst immer verhältnismäfsig grofs sein oder kann noch künstlich vermehrt werden. Dafs durch solche Anordnungen in der That Stabilität erreicht werden kann, sieht man am besten, wenn in (7) die Gleichheitszeichen erfüllt sind: Die Gl. (6) hat dann die Form der Gl. (4), die bei genügend grofsem Impuls stabile, wenn auch ungedämpfte Schwingungen bedeutet. Man versteht nun leicht, dafs im Falle der Ungleichheitszeichen in (7) die Stabilität nicht nur bestehen bleibt, sondern, wie es zu fordern ist, auch in höherem Grade gesichert ist, da einmal eingeleitete Schwingungen abgedämpft werden.

Aus den Ungleichungen (7) ist nun auch der Grund zu entnehmen, warum man nicht daran denken wird, an Stelle des Kreiselrahmens den Wagen selbst zu beschleunigen und den Rahmen zu dämpfen. Wäre nämlich W negativ und w positiv, also w_1 negativ, so wären unter der Voraussetzung $qh/j \gtreqless QH/J$ die Bedingungen (7) ebenfalls zu erfüllen, aber es müfste nach der ersten Ungleichung wegen des über das Schweremoment des Kreisels qh weit überwiegenden Schweremoments des Wagens QH nun der absolute Wert von W weit über w überwiegen, es müfste also entweder der Wagen sehr stark beschleunigt, oder aber der Kreiselrahmen nur sehr wenig gedämpft sein, zwei Möglichkeiten, die ersichtlich zu Schwierigkeiten führen werden.

Wir haben hier die Forderung, dafs einer der Freiheitsgrade beschleunigt werden müsse, um Stabilierung zu ermöglichen, analytisch aus den Gleichungen abgeleitet. Ein anderer Gesichtspunkt macht diese in gewissem Grade überraschende Folgerung verständlicher, dafs nämlich durch die Beschleunigung des Kreiselrahmens die vom Kreisel auf den Wagen übertragenen Momente verstärkt werden, die im Stande sind, den Wagen aufzurichten. Das auf den Wagen wirkende aufrichtende Moment ist ja nur durch das Glied $N d\vartheta/dt$ in den Gleichungen (5) gegeben. Wir fanden, dafs durch alleinige Vergröfserung des Eigenimpulses auf keinen Fall eine Abdämpfung einmal eingeleiteter Schwingungen möglich ist, und mit Rücksicht auf die immer vorhandene, wenn auch geringe Reibung überhaupt keine Stabilierung erzielt werden kann. Es ist naheliegend, deshalb den anderen Faktor $d\vartheta/dt$ des Kreiselmomentes, sozusagen den Hebelarm der Kreiselwirkung, zu vergröfsern, d. h. den Freiheitsgrad ϑ zu beschleunigen.

Die dem System hierbei zugeführte Energie findet eine doppelte Verwendung: Einmal ist zur Hebung des Schwerpunktes in die aufrechte Lage, nach einer anfänglichen seitlichen Neigung des Wagens,

Energie erforderlich. Sodann wird bei jeder Schwingung potentielle Energie des Wagens in kinetische verwandelt und als solche durch Reibung teilweise zerstört; sie mufs ersetzt werden, damit der Wagen wieder in die aufrechte Lage zurückkehren kann. Andererseits ist aber wirkliche Dämpfung eines der beiden Freiheitsgrade erforderlich, um die durch einen Anstofs dem Wagen erteilte kinetische Energie zu vernichten. Daher die Notwendigkeit, den Freiheitsgrad ψ zu dämpfen.

Die Bewegung des Kreiselwagens läfst sich durch Vergleich mit der Schwingung des aufrechten Kreisels, d. h. der pseudo-regulären Präcession von kleinem Präcessionskreis (vgl. pag. 342), anschaulich beschreiben.*) In beiden Freiheitsgraden ist die Gesamtbewegung eine Überlagerung zweier Schwingungen, wobei die Schwingung des Kreiselrahmens etwa je um eine halbe Schwingungsdauer gegen die des Wagens verschoben ist, wie aus den Gleichungen (5) bei kleiner Dämpfung folgt. Wie beim aufrechten Kreisel werden wir die langsamere als Präcession, die kürzere als Nutation bezeichnen; beide Schwingungskurven sind, wenn wir von der Dämpfung absehen, in unserem Falle Ellipsen, deren Mittelpunkt auf der Vertikalen liegt, unter den besonderen Verhältnissen des aufrechten Kreisels Kreise. Bei genügend grofsem Impuls berechnen wir die kleine Frequenz der ersten aus (6), indem wir die Potenzen x^4 und x^3 fortlassen, die grofse Frequenz der zweiten, indem wir die Potenz x und das absolute Glied nicht berücksichtigen. Für die Dämpfung der ersten ist nach der Vorzeichenfestsetzung von w und W und nach den Ungleichungen (7) das positive Glied $-QHw = +QHw_1$, für die der zweiten das positive Glied jW mafsgebend, während bei Fortfall von W das Glied $Jw = -Jw_1$ übrig bleiben und den Dämpfungsfaktor dieser raschen Schwingungen negativ machen würde.

Wir sehen also: Die Mafsnahme, den einen der beiden Freiheitsgrade zu beschleunigen, reicht nur aus, um die Präcessionsschwingung abzudämpfen, aber die Nutationsschwingung würde dadurch zeitlich beständig anwachsen und das System labil machen, wenn sie nicht künstlich gedämpft oder durch die Schienenreibung von selbst genügend reduziert wird.

In dem Patent von Brennan sind mehrere Vorrichtungen zur Beschleunigung der Präcession vorgesehen, die wir schematisch durch das Glied $-w_1 \frac{d\vartheta}{dt}$ in den Geichungen (5) berücksichtigten. Die Er-

---

*) Dieser Vergleich wird allerdings dadurch erschwert, dafs unsere jetzigen Koordinaten ψ, ϑ eine ganz andere Bedeutung wie die früheren ψ, ϑ haben. ψ wird jetzt wie pag. 905 definiert, um die horizontale, raumfeste Schiene, ϑ um die im Wagen feste annähernd horizontale Queraxe gemessen, dagegen wurde ψ früher um die raumfeste Vertikale, ϑ um die bewegliche, genau horizontale Knotenlinie gemessen.

scheinung, die diesen Anordnungen zu Grunde liegt, ist aus den einfachsten Kreiselversuchen bekannt, nämlich daſs ein auf die Spitze gestellter Kreisel, der also eine langsame Präcession beschreibt, rasch zu rollen beginnt, wenn sein Schwungring die Unterlage berührt. Ähnlich wird der Kreisel der Einschienenbahn an seitlichen Backen, die sich gegen seinen Schwungring anlegen, abrollen können. Die Vorrichtung ist nun so getroffen, daſs mit der Richtung, nach der der Wagen seitlich geneigt ist, auch die Seite wechselt, auf der sich die erwähnten Backen anlegen, d. h. daſs sich mit dem Vorzeichen von ψ auch die Richtung des Abrollens umkehrt. Nun ist aber nach den Gleichungen (3) (bei denen noch von der nicht beträchtlichen Dämpfung abgesehen ist) die Neigung ψ gleichphasig mit der Schwingungsrichtung $d\vartheta/dt$. Daher wird das Abrollen bei geeigneter Vorzeichenbestimmung immer den Sinn der Kreiselrahmenschwingung annehmen, also diese beschleunigen können. Die Beschleunigungsenergie wird hier direkt dem Schwungrad, indirekt dem Antriebsmotor entnommen. In der Praxis ist es natürlich vorteilhafter, wie es auch bei Brennan vorgesehen ist, nicht das Schwungrad selbst, sondern eine damit geeignet verbundene Rolle zu verwenden. Man dürfte auch leicht andere Vorrichtungen zur Beschleunigung der Rahmenschwingung konstruieren können, z. B. eine der Anschütz'schen Dämpfungsvorrichtung (vgl. pag. 861) ähnliche Anordnung.

Die hier besprochene aufrechte Kreiselanordnung ist nicht die in dem ursprünglichen Patent von Brennan gewählte; die Figurenaxe soll dort nicht in der Vertikalebene, sondern in der Horizontalebene schwingen, wobei sie in der Mittellage quer zum Wagen liegen muſs. Ihre Gleichgewichtslage ist alsdann eine indifferente, sie müſste nach den allgemeinen Prinzipien erst künstlich, etwa durch Feder- oder Gewichtsbelastung, labil gemacht werden. Ferner wird in diesem Fall an einer Wendung offenbar eine Verlagerung des Impulses erforderlich, es werden daher Momente auf den Wagen übertragen, die starke Schwingungen veranlassen können, während bei vertikaler Stellung eine Kurve den Kreisel nicht direkt beeinfluſst. Bei der horizontalen Anordnung werden daher zwei Kreisel mit entgegengesetztem Umlaufssinn vorgesehen, deren Rahmen zwangläufig gekoppelt sind, so daſs sich die schädlichen Kreiselwirkungen aufheben, ähnlich wie es Herr Skutsch beim Schiffskreisel vorgeschlagen hat. Sonst sind prinzipiell die beiden Anordnungen nicht voneinander verschieden.

Die bisherigen Überlegungen übertragen sich in sinngemäſser Weise auf den Fall, daſs der Wagen an einer Kurve nicht nur von der Schwerkraft, sondern auch von der Centrifugalkraft beeinfluſst ist.

Seine Gleichgewichtslage ist dann natürlich wie beim Zweischienenwagen durch die Bedingung des Gleichgewichts zwischen Schweremoment und Moment der Centrifugalkraft bestimmt.

Diese Gleichgewichtslage ist nach innen geneigt, der Kreiselwagen stellt sich in dem Maſse, als ein stationärer Zustand bei einer längeren Kurve angenähert wird, in die richtige Neigung ein, gerade so, wie es bei der Zweischienenbahn durch die Überhöhung der äuſseren Schiene künstlich bewirkt wird. Daſs überhaupt ein stationärer Zustand erreicht wird, rührt natürlich von der Kreiselstabilierung her, durch die die jetzige geneigte Gleichgewichtslage genau so gesichert wird, wie die aufrechte auf gerader Strecke. Die theoretische Behandlung der Einstellung würde überhaupt von der bisherigen nur durch die Beziehung der Gleichungen auf die neue Gleichgewichtslage statt auf die Mittellage $\psi = 0$ abweichen. Allerdings wird diese Einstellung zunächst mit einem Überneigen nach dem Äuſseren der Kurve beginnen, welches aus der primären Einwirkung der Zentrifugalkraft entspringt. Dieses wird aber sofort durch die Kreiselwirkung rückgängig gemacht und, mittels gedämpfter Oscillationen, in ein schlieſsliches Überneigen nach der inneren Seite verwandelt. Wenn die Übergangsbogen der Schienen bis zum Erreichen der stärksten Krümmung genügend lang sind, so wird der Zustand des Wagens beständig als ein langsam veränderlicher Gleichgewichtszustand aufzufassen sein.

Von Augenzeugen der Berliner Probefahrten wird uns in der That diese Erscheinung der unmittelbaren Selbsteinstellung bestätigt; ebenso auch, daſs im Falle einer einseitigen Belastung, die ja ähnlich wie die Centrifugalkraft wirkt, der Wagen sich für das Auge sofort auf die entgegengesetzte Seite neigte und ins Gleichgewicht setzte, also in die Lage, in der der nunmehr verlagerte Schwerpunkt des ganzen Systems genau oberhalb der Schiene liegt. Auch hier ist natürlich die primäre Wirkung der Belastung ein unmerklich kleines Nachgeben, dem aber sofort die aufrichtenden Kreiselwirkungen folgen, die die neue Gleichgewichtslage stabilieren.

Schädlicher für die Betriebssicherheit dürften kurz andauernde, starke Störungen, Impulse, sein, die bei der Fahrt auf den Wagen übertragen werden. Sei etwa L die Gröſse eines solchen Impulsmomentes um die Schiene, die im Mittel dem Konstrukteur bekannt sein wird. Der Ausschlag, mit dem der Wagen auf eine solche Störung reagieren wird, ist aus einer einfachen Überlegung zu entnehmen. Sieht man von der Vorwärtsbewegung ab, so hat (bei der ersten Anordnung) der Eigenimpuls des Kreiselwagens die vertikal aufgerichtete Gröſse N. Addieren wir vektoriell den störenden Zusatz-

impuls L hinzu, so wird die resultierende Impulsaxe in der Mittelebene im Sinne des Winkels ϑ geneigt um den Betrag:

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tg} \vartheta_L = \frac{L}{N}.$$

Die nun resultierende Bewegung könnten wir ausführlich so behandeln, wie wir ganz ähnlich beim Schiffskreisel die Rechnung für die durch einen Anstofs erregte Schiffsbewegung durchführten (pag. 802). Wir können das Resultat aber auch einfach geometrisch übersehen. Die Bewegung des Kreisels bezeichneten wir nämlich schon oben (pag. 910) als Überlagerung einer Präcession und einer Nutation. Nach den früheren ausführlichen Diskussionen der pseudoregulären Präcession ergibt sich jetzt die halbe Öffnung des Nutationskegels, d. h. der Nutationsausschlag, direkt als der Winkel zwischen der anfänglichen Lage der Figurenaxe, die vertikal stand, und der Impulsaxe, also als der Winkel ϑ_L. Allerdings bezeichnet dieser Winkel, da der Nutationskegel ein elliptischer ist, zunächst nur dessen grofse Axe, die in der Koordinate ϑ gemessen wird. Die Mittelaxe des Nutationskegels, nämlich die Impulsaxe, giebt dabei gleichzeitig den Präcessionsausschlag, der also, in der ϑ-Koordinate gemessen, ebenfalls ϑ_L beträgt. Die volle Abweichung des Kreiselrahmens von der Vertikalen, die sich im Maximum aus dem Präcessionsausschlag und dem Nutationsausschlag addiert, wird also für den Rahmen höchstens $2\vartheta_L$ betragen. Wie beim Schiffskreisel wird nun der gesamte Ausschlag des Kreiselrahmens wieder begrenzt sein müssen, etwa 45^0, also $\operatorname{tg} 2\vartheta_L$ den Wert 1 nicht übersteigen dürfen. Um Sicherheit zu haben, mufs man daher verlangen, dafs

$$N > 2L$$

sei, wobei wir noch in (8) ϑ_L statt $\operatorname{tg}\vartheta_L$ gesetzt haben.

Um nun auch den resultierenden Ausschlag des Wagens abzuschätzen, beschränken wir uns auf den Fall gleicher „Frequenz" der beiden Freiheitsgrade, also die Annahme:

$$\frac{QH}{J} = \frac{qh}{j}.$$

Dann folgt aber aus den Gleichungen (3a) unmittelbar durch Division für das Verhältnis von Kreisel- und Wagenausschlag:

$$\left(\frac{A}{a}\right)^2 = -\frac{j}{J},$$

also wird die Amplitude der Wagenschwingung nach (8), unter Berücksichtigung, dafs sie klein sein soll:

$$\psi_L = \frac{L}{N}\sqrt{\frac{j}{J}},$$

für die Präcession und im Ganzen höchstens $2\psi_L$.

Die Überlegung möge als eine überschlägliche Abschätzung der erforderlichen Konstruktionsgröfsen betrachtet werden, wenn die gröfsten in Betracht kommenden störenden Impulse L und die gröfsten zulässigen Ausschläge $2\psi_L$ bekannt sind.

Auch diese Betrachtung ist übrigens unabhängig davon, ob es sich um die erste oder zweite der erwähnten Anordnungen handelt. Welche Formen und Dimensionen sich im Speziellen als günstig erweisen werden, wird erst die Zukunft der Einschienenbahn lehren.

B. Nautische Anwendungen.

Im Folgenden stellen wir einige Fragen der Schiffahrt zusammen, die mit der Kreiseltheorie in Zusammenhang stehen. Die unter 4. besprochenen Wirkungen lehren kaum etwas Neues; es handelt sich nur darum, einige uns schon von den Eisenbahnen her bekannte Verhältnisse auf den Raddampfer zu übertragen. Gröfseres Interesse dürfte die unter 5. behandelte Beanspruchung der Lager bei einem Turbinenschiff haben. Der gyroskopische Horizont, Nr. 6, ist eine Vorrichtung, welche ähnliche Zwecke verfolgt wie der Kreiselkompafs in § 8, aber mit wesentlich bescheideneren Mitteln und entsprechend geringerem Erfolge.

4. Raddampfer.

Wenn das Steuer ausgelegt wird, z. B. nach Steuerbord, d. h. zur Rechten der Fahrtrichtung, so beschreibt das Schiff eine Kurve, deren Krümmungsmittelpunkt rechts liegt. Die Längsrichtung des Schiffes fällt dabei nicht genau mit der Richtung der Schwerpunktsbahn zusammen, ist vielmehr um den sog. Derivationswinkel nach der Seite des Krümmungsmittelpunktes hin verdreht. Die Gröfse dieses Winkels beträgt im Mittel für verschiedene Schiffstypen und Geschwindigkeiten $\delta = 10^0$.

Die Kräfte, die auf das Schiff wirken, sind folgende:

1. der Wasserwiderstand, welcher bei gerader Fahrt längsschiffs wirkt, aber beim Steuern gegen die Längsaxe geneigt ist;

2. der Ruderdruck, senkrecht gegen die Fläche des Steuerruders wirkend;

3. der Räderdruck, herrührend von der Triebkraft der Maschinen, längsschiffs wirkend;

4. die Kreiselwirkung der Räder. Die Axe dieses Momentes steht auf der Radaxe und der Vertikalen senkrecht, fällt also in die Längsaxe des Schiffes; und zwar wirkt es, in der Fahrtrichtung gesehen, dem Uhrzeigersinne entgegen. Die Gröfse der Kreiselwirkung beträgt in den mehrfach benutzten Bezeichnungen $N d\psi/dt = mv^2 r/R$, wobei R

den Krümmungsradius der Schwerpunktsbahn und m die reduzierte Masse der beiden Räder und der mit ihnen umlaufenden Maschinenteile bedeutet, und zwar reduziert auf denjenigen Abstand r von der Drehaxe, in dem die Umdrehungsgeschwindigkeit des Radsatzes gerade gleich der Fahrtgeschwindigkeit v wird.

Der Vorgang beim Steuern ist der, dafs zunächst das Moment des Steuerdruckes das Schiff um die Vertikale zu drehen beginnt im Sinne des Derivationswinkels δ. Da jetzt die Fahrtrichtung nicht mehr mit der Längsrichtung des Schiffes zusammenfällt, bekommt auch der Wasserwiderstand ein Moment um die Vertikale. Der definitive Wert des Winkels δ ist dann erreicht, wenn das Moment des Wasserwiderstandes, das das Schiff wegen seiner stabilen Bauart in die Fahrtrichtung zurückzulenken sucht, dem Momente des Steuerdruckes entgegengesetzt gleich ist. Zugleich heben sich jetzt der Wasserwiderstand und der Räderdruck nicht mehr vollständig auf, sondern es bleibt eine senkrecht zur Fahrt gerichtete Komponente übrig, die eben die seitliche Beschleunigung zur Folge hat. Deren Gröfse mufs der Centrifugalkraft entgegengesetzt gleich sein, die der Krümmung der Fahrtlinie entspricht, sie ist also

$$W = \frac{Mv^2}{R},$$

wenn M die Gesamtmasse des Schiffes bezeichnet. Ihr Angriffspunkt liegt etwa in der Mitte des Tiefgangs und angenähert auch in der Mitte der Schiffslänge. In geringerem Grade trägt zu ihr übrigens auch der Steuerdruck bei, den wir uns, nach Abspalten seines Drehmomentes um die Vertikale, etwa im nämlichen Punkt angreifend denken können, der aber vom Krümmungsmittelpunkt fortgerichtet ist. Die senkrecht zur Fahrt gerichtete Komponente des Steuerdruckes denken wir uns in W mit eingerechnet. Bekanntlich legt sich beim Steuern das Schiff etwas nach der Seite über, es *krängt*, wie der technische Ausdruck lautet, und zwar bei der weitaus gröfsten Anzahl von Schiffstypen vom Krümmungsmittelpunkte nach aufsen hin. Für das Krängen des Schiffes kommt die Querschiffskomponente unserer Kraft W, $W \cos \delta$, in Betracht.

Der Schwerpunkt des Schiffes liegt im Allgemeinen höher als der Angriffspunkt der genannten Kraft. Wenn der Höhenunterschied l beträgt, hat letztere daher ein Moment $lW \cos \delta$ um den Schwerpunkt, das das Schiff nach aufsen neigt. Der bei stationärem Zustand resultierende Krängungswinkel α bestimmt sich nun daraus, dafs dieses Moment, verstärkt noch durch das Moment der Kreiselwirkung, dem aufrichtenden Schweremoment $Mgh\alpha$ das Gleichgewicht hält, wo h die

metacentrische Höhe bedeutet. Diese Gleichung lautet ausführlicher geschrieben:

$$Mv^2 \frac{l}{R} \cos\delta + mv^2 \frac{r}{R} = Mgh\alpha.$$

Hieraus bestimmt sich der Krängungswinkel α zu

$$\alpha = \frac{v^2}{gh} \frac{l}{R} \left(\cos\delta + \frac{m}{M} \frac{r}{l}\right). \tag{9}$$

Die Formel ist analog gebaut zu der Gl. (2) dieses Paragraphen. Das entgegengesetzte Vorzeichen des zweiten Terms der Klammer, welcher den verhältnismäfsigen Einflufs der Kreiselwirkung darstellt, rührt daher, dafs wegen der annähernd aufrechten Lage des Schiffes die Kreiselwirkung denselben Sinn hat, wie das Moment der Centrifugalkraft, während bei dem herabhängenden Wagen der Schwebebahn die entsprechenden Momente von entgegengesetztem Sinn waren. Hier wie dort zeigt sich, dafs der Einflufs der Kreiselwirkung gering ist, nach Gl. (9) namentlich deshalb, weil die reduzierte Masse m der Räder sehr klein ist gegen die Gesamtmasse M des Schiffes.

Andererseits hat man oft eine günstige Einwirkung der Kreiselwirkung auf die Stabilität der Raddampfer gegen Rollbewegungen vermutet, eine Einwirkung, die ganz analog sein würde zu der ebenfalls hypothetischen, unter Nr. 2 betrachteten vermehrten Stabilität des Behrschen Einschienenwagens, und deren theoretische Begründung derselben Schwierigkeit begegnen würde wie dort, nämlich der starken Behinderung der Ausdrehung von Schiff bezw. Wagen um die Vertikale durch den Wasserwiderstand bezw. die Schienenreibung. Immerhin kann diese mutmafsliche selbsttätige Stabilierung des Raddampfers insofern ein gewisses historisches Interesse beanspruchen, als sie auch von Schlick angeführt*) wird und für ihn geradezu der Ausgang für seine Konstruktion des Schiffskreisels gewesen zu sein scheint.

5. Turbinendampfer.

Der neueste Typus des Ozeanfahrers, der Turbinendampfer, bringt Kreiselwirkungen von viel stärkerem Grade mit sich wie der Raddampfer. Namentlich sind es die grofsen Umlaufsgeschwindigkeiten der Dampfturbine, gegenüber den mäfsigen des Radsatzes, welche die Kreiselwirkung verstärken. Da die Turbinenwelle längsschiffs gestellt ist, um direkt mit der Schiffsschraube gekoppelt werden zu können, so ist überdies die Axe der Kreiselwirkung um 90° gegen ihre Lage beim Raddampfer gedreht. Eine Rollbewegung des Schiffes (Drehung um

*) Vgl. seinen pag. 808 zitierten Vortrag in der Schiffbautechnischen Gesellschaft, pag. 121 f.

die Längsaxe) ruft keine Kreiselwirkung hervor. Eine Stampfbewegung (Drehung um die Queraxe) bewirkt ein Kreiselmoment um die Vertikale. Beim Manöverieren des Schiffes (Drehung um die Vertikale) tritt eine Kreiselwirkung um die Querschiffsaxe auf.

Man hat vielfach in den Anfängen des Turbinenschiffbaues die Befürchtung gehabt, dafs ein Turbinenschiff schwerer zu steuern sein möchte, wie ein Schraubendampfer. Die Entwicklung der Dinge hat dieser Befürchtung nicht recht gegeben. Wir wollen sie theoretisch prüfen. Die unmittelbare Folge des Steuerns (Drehwinkel ψ), welches durch ein Drehmoment Ψ um die Vertikale eingeleitet sein möge, ist eine Kreiselwirkung $K = N\frac{d\psi}{dt}$ um die Querschiffsaxe, wo jetzt N den Impuls der Turbinen (Winkelgeschwindigkeit mal Trägheitsmoment des ganzen umlaufenden Massensystems) bedeutet. Dieses wirkt auf ein Stampfen des Schiffes (Drehwinkel ϑ) hin. Letzteres ruft eine Kreiselwirkung K' um die Vertikale wach von der Gröfse $N\frac{d\vartheta}{dt}$, welches dem Moment Ψ des Steuerdrucks entgegenwirkt. Die Drehgeschwindigkeit des Stampfens $d\vartheta/dt$ ist aber aus zwei Gründen klein, einmal wegen des gewaltigen Trägheitsmomentes des Schiffes, das hier mit seinem maximalen Wert eintritt, sodann wegen der Wasserwiderstände, welche das Stampfen einschränken. Nur in dem Mafse, wie das Schiff um die Queraxe frei beweglich ist, kann die Gegenwirkung gegen das Steuern (auch eine Art Stabilierung gegen äufsere Kräfte) auftreten. Bei Behinderung des Stampfens dagegen haben wir wieder einen Kreisel von nur zwei Freiheitsgraden ohne eigentliche Widerstandsfähigkeit. Übrigens kommt diese ganze Frage nur in Betracht, wenn es sich um eine unsymmetrische Anordnung mit nur einer Turbinenwelle handelt.

Ernstlich erwogen wird heutzutage wohl nur die von den Kreiselwirkungen herrührende Beanspruchung der Lager*); diese ist uns von sachverständiger Seite als mögliche Ursache für thatsächlich vorgekommene Unfälle von Turbinen-Torpedobooten genannt. Wir setzen dabei voraus eine merklich feste Welle des Turbinenkörpers (entsprechend der für den Schiffbau hauptsächlich in Betracht kommenden Parsons- oder Curtis-Turbine), nicht eine schwanke Welle (vgl. den vorhergehenden Paragraphen über die Laval-Turbine), bei der statt der völligen Ablenkung des Drehimpulses im Wesentlichen eine Verbiegung der Welle auftreten wird, die im Allgemeinen mit geringerer Lagerbeanspruchung verbunden ist. Übrigens mag auch bei einer merklich festen Welle ein geringer Teil der Kreiselwirkung durch elastische Ver-

*) A. Stodola, Die Dampfturbinen, Nr. 104.

biegung derselben vermieden werden, so dafs nicht die ganze hier zu berechnende Beanspruchung auf das Lager kommt.

Die ganze Kreiselwirkung ist ein Kräftepaar $N\frac{d\psi}{dt}$, dessen beide Einzelkräfte auf die beiden Endlager der Turbinenwelle in entgegengesetzten Richtungen wirken, und zwar in vertikaler oder horizontaler Richtung, je nachdem es sich um den Vorgang des Steuerns oder Stampfens handelt.

Wir nehmen sogleich ein Zahlenbeispiel*): Die Turbine mache 250 Umläufe pro Minute, entsprechend der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi \cdot 250/60$. Der mittlere Durchmesser der Laufräder sei 2,86 m. Das auf diesen Durchmesser reduzierte Gewicht der rotierenden Teile beträgt etwa 18000 kg, die Entfernung der Lager 5,55 m.

Als Trägheitsmoment erhält man:

$$J = 18000 \cdot 1{,}43^2 \text{ kg (Masse) m}^2$$
$$= 1800 \cdot 1{,}43^2 \text{ kg (Gewicht) m sec}^2$$
$$= 3600 \text{ kg (Gewicht) m sec}^2$$

und als Eigenimpuls:

$$N = J\omega = 2\pi \cdot \frac{250}{60} \cdot 3600$$
$$= 2\pi \cdot 15000 \text{ kg (Gewicht) m sec.}$$

Bei einer Geschwindigkeit der Steuer- oder Stampfbewegnng von 10^0 pro sec $= \frac{\pi}{18}$ sec^{-1} wird also die Kreiselwirkung

$$K = N\frac{\pi}{18} = \frac{50000}{3} \text{ kg m.}$$

Dieses Moment verteilt sich mit dem Hebelarm 5,55 m auf die beiden Lager. Auf jedes Lager kommt also die Belastung

$$P = \frac{50000}{3 \cdot 5{,}55} = 3000 \text{ kg.}$$

Von der Dauerbelastung durch das Gewicht der Turbine (gröfser als die Hälfte von 18000 kg) ist dies nur ein kleiner Bruchteil. Unsere Berechnung läfst also die Gefahr einer solchen zusätzlichen Lagerbeanspruchung durch Kreiselwirkungen nicht gerade als erheblich erscheinen.

*) Dasselbe entpricht einer gröfseren Schiffsturbine, System Curtis von 4000 PS des Dampfers „Creole", vgl. Engineering, 1906, pag. 696.

6. Der gyroskopische Horizont.

Die Aufgabe der geographischen Ortsbestimmung, nämlich die Messung des Höhenwinkels eines Sterns, setzt die Festlegung der Horizontalebene voraus. Während diese zu Lande durch Wasserwage oder Quecksilberniveau bestimmt werden kann, bleibt auf dem schwankenden Schiff zunächst nur die Beobachtung des natürlichen Horizontes übrig. Diese aber wird bei Nebel oder stürmischer See unmöglich. Es ergiebt sich also das Problem*), statt des natürlichen einen stets beobachtbaren künstlichen Horizont herzustellen.

Kapitän Fleuriais**) benutzt zu diesem Zweck einen Kreisel folgender Bauart: kupferner Ring (175 gr schwer) mit glockenartiger Fortsetzung nach unten; die kurze Figurenaxe in einen Zapfen endigend, der auf einer Pfanne ruht; Schwerpunkt ca. 1 mm unter dem Stützpunkt; Antrieb pneumatisch (der elektrische Antrieb war damals noch nicht ausgebildet); Umdrehungszahl pro Sekunde etwa 80 zu Anfang, 50 zu Ende einer Beobachtung; der Antrieb wirkt nicht kontinuierlich, sondern nur vor Beginn der Beobachtung, die Verminderung der Umdrehungszahl kommt wesentlich auf den Luftwiderstand, so daſs man auch versucht hat, den Apparat im luftverdünnten Raum laufen zu lassen. Auf der oberen ebenen Fläche des Kupferringes sind an den beiden Enden eines Durchmessers zwei plankonvexe Linsen L, L' so angebracht, daſs die eine die plane Fläche der anderen im Beobachtungsfernrohr abbildet. Jede Linse trägt auf ihrer planen Fläche einen Strich, welcher senkrecht gegen die Figurenaxe des Schwungringes, also bei aufrechter Lage derselben horizontal, verläuft. Ist der Kreisel in Rotation, so empfängt der Beobachter am Fernrohr während jeder Umdrehung zwei Eindrücke, abwechselnd von dem Strich der Linse L und L' und entworfen von der Linse L' und L, die bei groſser Umdrehungszahl zu einem Bilde verschmelzen. Dieses Bild ist ein horizontaler Strich, wenn die Figurenaxe vertikal steht, und stellt direkt die Spur der Horizontalebene dar. In Wirklichkeit steht die Figurenaxe auf dem schwankenden Schiff nicht vertikal, sondern beschreibt langsam unter dem Einfluſs der Schwere einen Präcessionskegel von vertikaler Axe, bei den Dimensionen des Apparats etwa in $1^1/_2$ Minuten. Die kurzen Nutationen, die sich

*) Dahin zielende Versuche sind schon vor anderthalb Jahrhunderten gemacht, vgl. Serson, Philosoph. Transactions, London 1752, und The Gentleman's Magazine 1754.

**) Fleuriais, Bulletin astron. 3, 1886, pag. 579; De Jonquières Comptes Rendus, t. 104, Paris 1887; Baule, Revue maritime 1890.

der regelmäſsigen Präcession überlagern, kommen für die Beobachtung im Fernrohr nicht in Betracht; auch die Beschleunigungsdrucke wegen der Schiffsschwankungen, die von viel kleinerer Periode sind wie die Präcessionsdauer des Kreisels, werden sich zum gröſsten Teil von selbst herausmitteln. Der Beobachter bekommt also wesentlich denselben Eindruck wie bei einer genauen Präcession, d. h. es erscheint ein horizontaler Strich im Gesichtsfelde, wenn sich die Figurenaxe gerade in der durch die Fernrohraxe gelegten Vertikalebene befindet, und zwar abwechselnd ein horizontaler Strich in der oberen oder unteren Hälfte des Gesichtsfeldes bei den aufeinanderfolgenden beiden Durchgängen der Figurenaxe durch diese Vertikalebene. Aber auch bei allen Zwischenlagen der Figurenaxe entsteht ein Bild des Striches (bezw. bei jeder Umdrehung zwei miteinander verschmelzende Bilder); dieses Bild ist jedoch jetzt entsprechend der jeweiligen Stellung der Figurenaxe gegen die Horizontale geneigt. Der Übergang von der oberen zur unteren horizontalen Lage des Strichs wird also durch successive veränderliche und geneigte Lagen des Strichs bewerkstelligt. Der Beobachter hat nun wesentlich auf die beiden horizontalen Lagen zu achten; indem er ihre Mittellinie konstruiert, findet er die Spur der durch den Augenpunkt gehenden Horizontalebene. Diese Halbierungslinie ist der gesuchte *gyroskopische Horizont.*

Bei der wirklichen Beobachtung mittelt man besser nicht zwischen zwei, sondern zwischen drei aufeinanderfolgenden horizontalen Lagen des Strichs, weil sich die Figurenaxe wegen der Reibung in der Pfanne und wegen des Luftwiderstandes langsam aufrichtet. Zur Bestimmung des Höhenwinkels ist mit dem Fernrohr ein Sextant verbunden. Dessen Spiegel sind so einzustellen, daſs sich das Bild des Sterns im Fernrohr genau mit der festgestellten Lage des gyroskopischen Horizontes deckt; der Höhenwinkel kann dann als doppelter Drehwinkel des einen Spiegels direkt abgelesen werden.

Was man gegen diese sinnreiche Konstruktion einwenden kann, scheint allein ihre schwierige Handhabung zu sein. Ein geübter Beobachter erzielt Genauigkeiten von wenigen Minuten; doch gehört monatelange Übung dazu. Wir hatten selbst Gelegenheit, auf der Kieler Sternwarte eine Messung mit dem gyroskopischen Horizont zu machen, und können die Schwierigkeit seiner Handhabung für den Ungeübten bestätigen. In der französischen Marine wird der Apparat in vielen Exemplaren gebraucht; auch soll die russische Flotte beim russisch-japanischen Krieg damit ausgerüstet gewesen sein.

7. Bemerkungen zur Aeronautik.

Naturgemäfs ist auch die Rolle der Kreiselwirkungen bei Luftfahrzeugen in letzter Zeit viel diskutiert worden.*) Wir denken zunächst an die direkten Wirkungen der Luftschraube bei einem Motorflugapparat. Es handelt sich dabei um die nämlichen Einflüsse wie bei dem Turbinendampfer und, abgesehen von der Richtung, auch bei dem Raddampfer oder den Eisenbahnen; nur sind die Wirkungen bei den verhältnismäfsig leichtgebauten Aeroplanen viel beträchtlicher, weil die umlaufenden Massen einen viel gröfseren Bruchteil der Gesamtmasse des Systems ausmachen wie dort. Ein seitliches Steuern des Flugapparats wird danach von einem Aufkippen begleitet sein und ein Aufrichten oder Senken der Längsaxe von seitlichen Ablenkungen. Diese Erscheinung wird, wie wir hören und wie nicht anders zu erwarten ist, thatsächlich beobachtet.

Solche Wirkungen werden einerseits als unerwünscht angesehen werden, da sie die leichte Steuerfähigkeit des Luftschiffes beeinträchtigen (und zwar hier in ganz anderer Gröfsenordnung wie beim Turbinendampfer, vgl. Nr. 5); andererseits werden sie als ein sehr erwünschter Beitrag zur Stabilität des Flugapparates angesprochen werden können. Geht man nämlich der Verkettung dieser auf senkrechte und seitliche Ablenkungen wirkenden Momente wie im § 1 IV nach, so überzeugt man sich leicht, dafs auch hier die Richtung der Propelleraxe gegen jede Art ausdrehender Momente von dazu senkrechter Drehaxe bei hinreichend schneller Rotation beliebig stark stabiliert wird. Ob hiernach die günstigen oder ungünstigen Kreiselwirkungen der Schraube überwiegen, wird je nach der Bauart des Apparates von Fall zu Fall zu entscheiden sein. Die Gebrüder Wright scheinen die ungünstigen Wirkungen als vorherrschend zu befürchten, indem sie ein Paar von entgegengesetzt arbeitenden Schrauben verwenden.

Andererseits ist auch die Möglichkeit einer besonderen Kreiselstabilierung von Luftfahrzeugen bereits in Angriff genommen. Da die Aviatik ganz wesentlich mit Stabilitätsschwierigkeiten zu kämpfen hat, so wird man solchen Kreiselkonstruktionen eine wirkliche Bedeutung nicht absprechen können. Man wird auch hier, ähnlich wie beim Torpedo, ein Prinzip der direkten und der indirekten Stabilierung unterscheiden können. Wir verweisen namentlich auf eine Note von

*) Vgl. z. B. die Aufsätze von L. Prandtl: „Einige für die Flugtechnik wichtige Beziehungen aus der Mechanik“ in der Ztschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, Jahrg. I, Heft 1—7, 1910.

Carpentier*), die ein von Regnard erbautes Modell erläutert. Hier kommt das indirekte Prinzip in Betracht (vgl. Whitehead-Torpedo, § 3): Der Kreisel bethätigt, indem er die Schwankungen des Fliegers nicht mitmacht, einen elektrischen Kontakt, der zur Auslegung von Gegensteuern Anlafs giebt. Ob das direkte Prinzip des fest oder, wie bei Schlick, schwingend eingebauten Kreisels schon versuchsweise Verwendung gefunden hat, ist uns nicht bekannt.

C. Ballistik.

Unter allen Fragen der irdischen Mechanik ist das Problem der Ballistik vielleicht am frühesten**) den Methoden der dynamischen Behandlung unterzogen worden. Schon d'Alembert und Euler haben sich an der ballistischen Kurve versucht. Das ballistische Rotationsproblem wurde z. B. von Poisson theoretisch und von Magnus experimentell angegriffen. Auch heutzutage denken wir bei dem „frei beweglichen starren Körper der Dynamik" unwillkürlich in erster Linie an das in der Luft schwebende Geschofs, in dessen Massenmittelpunkte die Schwere angreift. Wie weit wir uns dabei von der Wirklichkeit entfernen, wenn wir nicht zugleich den Luftwiderstand berücksichtigen, wurde gelegentlich pag. 533 veranschaulicht. Die Frage nun, wie diese für die äufsere Ballistik mafsgebende Gröfse theoretisch zu fassen wäre, liegt nicht eigentlich im Gebiete der Dynamik des starren Körpers, sondern in demjenigen der Hydrodynamik der kompressiblen Flüssigkeit, oder richtiger in einer eigenartigen Verkoppelung beider Gebiete. Dies wollen wir zunächst in Nr. 8 ausführen. Da indessen wohl noch für lange Zeit an eine eigentliche Lösung dieses idealen ballistischen Problems wegen seiner aufserordentlichen mathematischen Schwierigkeiten kaum gedacht werden kann, ist man auf eine schätzungsweise und empirische Betrachtung der verschiedenen Einflüsse des umgebenden Luftmittels angewiesen. Wie sie mit der Dynamik des starren Körpers zu kombinieren sind, wird in Nr. 9 angedeutet unter besonderer Hervorhebung der mutmafslichen Rolle der Kreiselwirkungen.

Nach dem Gesagten ist klar, dafs die Schwierigkeit des ballistischen Problems nicht auf Seiten der Dynamik, sondern der Hydrodynamik liegt. Man darf vielleicht hoffen, dafs die Luftschiffahrt, die im Begriffe ist, die hydrodynamischen Fragen neu zu beleben, auch der Ballistik zu gute kommen wird.

---

*) Comptes Rendus, t. 150, pag. 829, März 1910.

**) Reichliche Litteraturnachweise bei C. Cranz, Encykl. d. math. Wiss. Bd. IV, Art. 18, oder Lehrbuch der Ballistik, Leipzig 1910, Teil 1, äufsere Ballistik.

8. Das dynamisch-hydrodynamische Problem.

Es ist selbstverständlich, dafs der Körper in Flüssigkeit strenge genommen nicht sechs, sondern unendlich viele Freiheitsgrade hat. Die exakte Bestimmung seiner Bewegung (seiner sechs Koordinaten) ist nur im Zusammenhange mit derjenigen der Flüssigkeitsteilchen (ihrer unendlich vielen Lagenparameter) möglich. Auch die beiden Teile der Bewegung, Translation des Schwerpunktes und Rotation um den Schwerpunkt, die bei Abwesenheit des äufseren Mittels (d. h. bei Vernachlässigung seiner Trägheit etc.) voneinander unabhängig behandelt werden können, sind durch die gleichzeitige Bewegung der umgebenden Flüssigkeit untrennbar miteinander verbunden.

Die genaueren formelmäfsigen Zusammenhänge zwischen Flüssigkeits- und Körperbewegung sind dem Mathematiker wohlbekannt für den Fall, dafs die umgebende Flüssigkeit als inkompressibel und reibungslos und ihre Bewegung als wirbellos gedacht wird. Das inkompressible Mittel ist sozusagen zwangläufig mit dem bewegten Körper verbunden; da dasselbe alle Störungen mit unendlich grofser Fortpflanzungsgeschwindigkeit weitergiebt, macht sich der augenblickliche Bewegungszustand des Körpers momentan in der ganzen unendlichen Flüssigkeit geltend, ihre Bewegung hängt nur von den Augenblickswerten der Körpergeschwindigkeit ab und zeigt keine Rückerinnerung an die früheren Zustände. In diesem Falle kann also insbesondere die lebendige Kraft des ganzen Systems Körper und Flüssigkeit als Funktion der augenblicklichen Werte der sechs Geschwindigkeitskoordinaten des Körpers dargestellt werden, sodafs nach den Lagrange'schen Methoden die Bewegungsgleichungen des Systems in Form von sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewonnen werden können. Die Hydrodynamik spielt hier nur in die Bestimmung der lebendigen Kraft des Systems hinein, die sich jetzt z. B. nicht mehr aus der blofsen Superposition eines Translations- und eines Rotationsbestandteils zusammensetzen läfst; Aufstellung und Charakter der Differentialgleichungen dagegen entsprechen der gewöhnlichen Dynamik.

In Wirklichkeit hat natürlich auch Wasser, der Typus der inkompressibeln Flüssigkeit, seine endliche Schallgeschwindigkeit, ist also kompressibel. Man kann aber auch jede gasförmige Flüssigkeit als inkompressibel behandeln, solange die gröfsten vorkommenden Geschwindigkeiten klein gegen ihre Schallgeschwindigkeit sind. Dann wird ja der Einflufs früherer Bewegungszustände viel schneller fortgepflanzt und ins Unendliche dissipiert, als neue Störungen aus dem

Wechsel des Bewegungszustandes entstehen. Also hängt alles merklich von dem augenblicklichen Bewegungszustande ab, wie bei idealinkompressiblem Verhalten.

Leider ist nun dieses Kriterium eines quasi-inkompressibeln Verhaltens bei der Ballistik gar nicht erfüllt — während sich die Luftschiffahrtstheorie durchweg die vereinfachende Annahme der Inkompressibilität gestatten darf. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt bei den Artillerie- und Infanteriegeschossen 465 bezw. 885 m/sec, ist also „Überschallgeschwindigkeit"; bei den Weitschüssen der Artillerie geht sie im Verlaufe des Schusses durch den kritischen Wert hindurch und endigt z. B. bei der Schufsweite von 4000 m mit 257 m/sec als „Unterschallgeschwindigkeit"; auch die Geschwindigkeit des Infanteriegeschosses sinkt bei 2000 m Schufsweite auf 166 m/sec herab. Dafs aber das Strömungsfeld bei Über- und Unterschallgeschwindigkeit grundsätzlich verschieden ist, ist bekannt: Bei Überschallgeschwindigkeit läfst das Geschofs die an seinen früheren Lagen erzeugten Wirkungen (Kompressions- und Dilatationswellen) hinter sich zurück, bei Unterschallgeschwindigkeit wird es von ihnen allseitig wie von einer Atmosphäre umgeben. Wer jemals die schönen Photographien dieser Verhältnisse bei E. und L. Mach gesehen hat, wird an der Möglichkeit zweifeln, die Mannigfaltigkeit des Strömungsfeldes durch ein einheitliches Luftwiderstandsgesetz oder auch nur in den verschiedenen Geschwindigkeitsbereichen durch eine Reihe verschiedener Gesetze darzustellen, die nur von der augenblicklichen Schwerpunktsgeschwindigkeit und der augenblicklichen Lage des Geschosses gegen diese abhingen. Die einzig adäquate Behandlung des Problems wird vielmehr in der gleichzeitigen Untersuchung der Luft- und Körperbewegung mittels der hydrodynamischen partiellen und der dynamischen totalen Differentialgleichungen bestehen, einer Behandlung, die neben dem Bewegungsverlauf auch die exakten Luftwiderstandsgesetze liefern würde.

Natürlich ist das Problem in dieser Allgemeinheit völlig unlösbar. Man wird es unterteilen müssen. Ein rein hydrodynamisches Problem erhält man, wenn man sich die Bewegung des Geschosses vorgegeben denkt, z. B. als gleichförmig geradlinig in Richtung der Geschofsaxe, und nach dem zugehörigen Strömungsfelde der Luft fragt. Man könnte dann die Energieverluste in diesem Strömungsfelde finden oder, etwas vollständiger, die Drucke, die das Strömungsfeld auf den Mantel des Geschosses überträgt. Bei der freien Bewegung des Geschosses würden diese Drucke zusammen mit der Schwere die vorausgesetzte Gleichförmigkeit und Geradlinigkeit der Geschofsbahn successive abändern. Auch hierin liegt schon eine Näherung insofern, als ja umgekehrt auch

die veränderliche Geschwindigkeit und Stellung des Geschosses das Strömungsfeld und seine Druckwirkung beeinflussen.

Bleiben wir aber bei dem genannten einfachsten hydrodynamischen Problem. Die Energieverluste in der mitbewegten Luft lassen sich schematisch in zwei Teile sondern, in einen Teil, welcher in der Energiezerstreuung durch Wellen, und einen zweiten Teil, welcher in der Energieverwandlung durch Reibung oder in Wirbeln auf der Rückseite des Geschosses seinen Ursprung hat. Um den Charakter des ersten Teils zu finden, wird man von den Differentialgleichungen der reibungsfreien aber kompressibeln Flüssigkeit ausgehen; um den zweiten Teil zu bestimmen, wird es ausreichen, die Differentialgleichungen der reibenden oder wirbelnden aber inkompressibeln Flüssigkeit zu Grunde zu legen. Der erste Teil giebt den „*Wellenwiderstand*“ der Luft; sein Vorhandensein wird durch die Mach'schen Photographien veranschaulicht. Der zweite Teil heiſse kurz der „*Reibungswiderstand*“ der Luft. Nach dem eben Gesagten wäre er in zwei Bestandteile weiter zu unterscheiden, den eigentlichen Reibungswiderstand (Oberflächenwiderstand oder Hautreibung) und den Wirbelwiderstand (Formwiderstand in der Bezeichnung von L. Prandtl).*) Auch bei dem analogen Problem des Schiffswiderstandes werden diese Teile unterschieden.

Bezüglich des *Reibungswiderstandes* nimmt man seit Newton an, daſs er dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei, ohne daſs es bisher gelungen wäre, den Beweis hierfür auf hydrodynamischer Grundlage zu führen. Die Schwierigkeit liegt in dem quadratischen Charakter der hydrodynamischen Differentialgleichungen, in der dadurch bedingten Instabilität der einfachsten Bewegungsformen und ihrem Umschlagen in kompliziertere „turbulente“ Bewegungen. Auch dieses Problem sieht im Falle der Geschoſsbewegung ziemlich hoffnungslos aus, solange es nicht in dem viel einfacheren Falle der Strömung in Röhren etc. gelungen ist, zum hydrodynamischen Verständnis der Turbulenz vorzudringen.

Einfacher dürfte das Problem des *Wellenwiderstandes* liegen. Um zu seiner Inangriffnahme zu ermutigen, führen wir einiges über einen ähnlichen elektrischen Fall an. Wenn man eine elektrische Ladung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit bewegt, so läſst sich das entstehende elektromagnetische Feld (wenigstens nach der älteren Theorie des sog. ruhenden Äthers) bestimmen und zeigt dieselben Erscheinungen wie diejenigen des „Mach'schen Phänomens“ der Hydrodynamik. Die elektrische Ladung, kürzer gesagt, das „Elektron“, läſst seine Wirkungen

*) Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Jahrg. 1, pag. 63.

hinter sich in einem Kegel, dessen Öffnung mit dem Geschwindigkeitsverhältnis v/c (c = Lichtgeschwindigkeit, $v > c$ Geschwindigkeit des Elektrons) abnimmt. Indem sich diese Wirkungen solchergestalt ins Unendliche zerstreuen, findet ein fortgesetzter Energieverlust durch Strahlung statt; es wirkt also auf das Elektron ein Widerstand entgegen der Richtung seiner Bewegung. Nimmt man das Elektron als kugelförmig an, so wird der Widerstand *)

$$A\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right);$$

der Proportionalitätsfaktor A hängt dabei von der Ladung des Elektrons und der Gröſse der Kugel in einfacher Weise ab. Der Widerstand wird also Null für $v = c$ und nähert sich für $v = \infty$ einer festen Grenze. Auch für Unterlichtgeschwindigkeit läſst sich das Feld bestimmen und liefert hier bekanntermaſsen für jeden beliebigen Wert $v < c$ den Widerstand Null.

Wir haben Grund zu der Annahme, daſs ein ähnlich einfaches Gesetz für den Wellenwiderstand auch bei dem entsprechenden hydrodynamischen Problem der Ballistik gelten wird, trotzdem die Verhältnisse hier viel komplizierter liegen wie in der Elektrodynamik. Einmal kommt hier die komplizierte, nicht kugelförmige Gestalt des Geschosses in Betracht; sodann ist die an der Oberfläche des Geschosses geltende Bedingung des Nichteindringens der Luft, wonach die Strömungslinien an der Oberfläche parallel mit dieser verlaufen müssen, viel schwieriger, wie die entsprechende Bedingung in der Elektrodynamik, in der die Divergenz der elektrischen Kraftlinien direkt durch die Gröſse der Ladungsdichte bestimmt wird (das hydrodynamische Problem ist eine „Randwertaufgabe", das elektrodynamische nur eine „Summationsaufgabe"). Der Hauptunterschied aber liegt in dem viel komplizierteren, nicht linearen Charakter der hydrodynamischen Differentialgleichungen gegenüber dem rein linearen Charakter der elektrischen Feldgleichungen; dieser Unterschied bringt es z. B. mit sich, daſs sich die elektrischen Wirkungen stets und genau mit der Lichtgeschwindigkeit c fortpflanzen, während in der Hydrodynamik die Schallgeschwindigkeit, die wir ebenfalls mit c bezeichnen wollen, nur eine untere Grenze der Fortpflanzung für unendlich kleine Störungen darstellt, während die wirkliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Amplitude der Störungen wächst. Hiermit hängt es auch zusammen, daſs im elektrodynamischen Falle

*) A. Sommerfeld, Göttinger Nachr. 1904, pag. 401, und Amsterdamer Akademie, Proceedings, 1904, pag. 366. Vgl. auch M. Abraham, Theorie der Elektrizität II, § 27.

die Front des Elektrons völlig feldfrei ist, während sich im hydrodynamischen Falle eine Verdichtungswelle vor den Kopf des Geschosses lagert und von hier aus nach hinten umbiegend den Mantel des Machschen Kegels bildet. Dieses Luftpolster wird also mit gröſserer Geschwindigkeit als c vorwärts getragen; die Schallgeschwindigkeit c ist also für seine Fortpflanzung ersichtlich nicht mehr maſsgebend.

Unsere Annahme, daſs trotzdem das elektrodynamische Gesetz des Wellenwiderstandes im Groſsen und Ganzen auch für den hydrodynamischen Fall gelten möge, wird gestützt einmal durch die Erwägung, daſs der geometrische Charakter des Feldes beidemal durch das Machsche Phänomen wesentlich in der gleichen Weise bestimmt wird, sodann durch den experimentellen Befund der Schieſsversuche. Derselbe wird durch eine Kurve dargestellt, die wir dem zitierten Encyklopädie-Artikel von Cranz entnehmen.

Nach der Abscisse der Fig. 143 wird das Geschwindigkeitsverhältnis $x = v/c$ aufgetragen, nach der Ordinate das Verhältnis des Gesamtwiderstandes, wie er aus den Schuſstafeln entnommen wird, zu dem Reibungswiderstande der Luft, $y = (W + R)/R$, wobei wir den Gesamtwiderstand in Wellenwiderstand W und Reibungswiderstand R zerlegt haben; letzterer werde in der üblichen Form des Newton'schen Reibungsgesetzes $R = av^2$ proportional mit v^2 angesetzt. Die ausgezogene Kurve stellt eine empirische Interpolationsformel von Siacci dar, welche sich dem zahlreichen Beobachtungmaterial sehr gut anschlieſst. Die Kurve läſst folgendes erkennen: Für kleine v ist y konstant gleich 1, in der Nähe von $v = c$ findet ein ziemlich plötzlicher Anstieg statt, darauf folgt ein Maximum und weiterhin ein allmählicher Abstieg. Wir würden dies Verhalten folgendermaſsen theoretisch deuten: Für $v < c$ ist der Wellenwiderstand W zunächst Null und daher $y = 1$; in der Nähe von $v = c$ (und schon etwas vorher) setzt der Wellenwiderstand in zunehmendem Maſse ein; derselbe wächst aber mit v in geringerem Maſse wie der Reibungswiderstand R; das Verhältnis W/R nimmt daher ebenso wie y mit wachsendem v wieder ab.

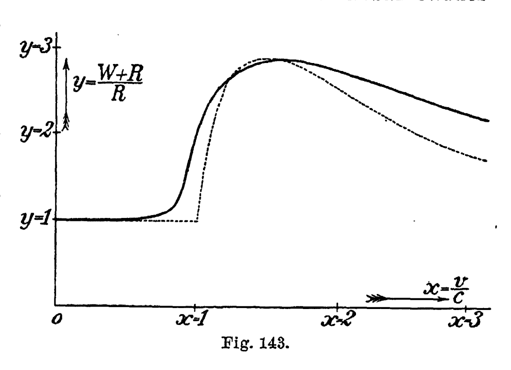


Fig. 143.

In der punktierten Kurve haben wir denjenigen Wert von y aufgetragen, der sich durch direkte Übertragung des obigen elektrodynamischen Gesetzes für den Wellenwiderstand ergeben würde. Der

hierbei natürlich unbestimmt bleibende Proportionalitätsfaktor A der obigen Formel ist so gewählt, dafs das Maximum unseres elektrodynamischen Gesetzes gleiche Höhe mit dem Maximum des empirischen Gesetzes hat. Wir zeichnen also:

$$\text{für } v < c: \quad W = 0,\ y = \frac{R}{R} = 1,$$

$$\text{für } v > c: \quad W = A\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right),\ R = av^2,\ y = 1 + C\frac{c^2}{v^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right),$$

wobei $C = A/ac^2$ in der genannten Weise aus den Beobachtungen entnommen wurde. Es ist kaum zu verkennen, dafs wir durch diese sehr einfachen Gesichtspunkte einen allgemeinen Anschlufs an den Charakter der empirischen Kurve erreichen, der schwerlich zufälliger Natur sein kann.*)

Für praktische Zwecke ist natürlich mit unserer idealisierten Form der Luftwiderstandskurve nichts gewonnen; ihre Mitteilung sollte lediglich bezwecken, zu einer genaueren Untersuchung des Wellenwiderstandes im obigen Sinne zu ermutigen und unsere These von der wesentlich hydrodynamischen Natur des ballistischen Problems in etwas zu belegen.

9. Die allgemeinen Erfahrungsthatsachen der Ballistik und die Rolle der Kreiselwirkungen.

Wir stellen zunächst einige wenige Thatsachen der Ballistik zusammen, die als gesichert gelten können, und betrachten sie teils vom Standpunkte unserer hydrodynamischen Auffassung, teils von demjenigen der Kreiseltheorie. Solche Thatsachen sind: das Auftreten eines Luftwiderstandsmomentes, der Sinn desselben, welcher einer Lage des Angriffspunktes vor dem Geschofs-Schwerpunkt entspricht, die Stabilität des rotierenden Langgeschosses, die Rechtsabweichung bei Rechtsdrall.

Der Luftwiderstand und das Luftwiderstandsmoment. Dafs ein bewegter Körper von dem umgebenden Mittel einen Wider-

---

*) Nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prandtl kann man für sehr grofse Geschwindigkeiten das Newton'sche Reibungsgesetz strenge begründen. Der theoretische Wert des Proportionalitätsfaktors a ergiebt sich dabei gröfser als der empirische Wert a_0 für kleine Geschwindigkeiten. Trägt man also in der Figur als Ordinate auf: Gesamtwiderstand geteilt durch Reibungswiderstand für kleine Geschwindigkeiten, d. h. $y = (W + R)/a_0 v^2$ unter Beibehaltung unseres elektrodynamischen Wertes für W, so wäre für grofse Geschwindigkeiten wegen $R = av^2 > a_0 v^2$ das rechte Ende unserer punktierten Kurve um den Betrag $(a - a_0)/a_0$ höher zu legen. Der Anschlufs an die ausgezogene Kurve der Figur würde dadurch noch verbessert werden.

stand erfährt, ist uns geläufig. Dafs unter Umständen (in der Nähe der Schallgeschwindigkeit) neben dem Reibungswiderstand der Wellenwiderstand einen überwiegenden Teil des Gesamtwiderstandes ausmacht, ist weniger bekannt, aber durch das Vorangehende deutlich. Wenn der Körper symmetrisch gegen die Bewegungsrichtung geformt ist, ist der Gesamtwiderstand natürlich der Bewegung genau entgegengerichtet: das Moment des Luftwiderstandes um den Schwerpunkt verschwindet. Wegen des Hinzutretens der Schwere wird aber dieser Zustand vollkommener Symmetrie, der im Momente des Abfeuerns nahezu besteht, in jedem Augenblicke abgeändert, da die Bahntangente nach unten gedreht wird. Ein Moment des Luftwiderstandes würde jetzt nur dann nicht auftreten, wenn der Luftwiderstand einer Einzelkraft gleichgesetzt werden könnte, die im Schwerpunkte angriffe. Nach unserer hydrodynamischen Auffassung ist dies natürlich höchst unwahrscheinlich; die Kompliziertheit des Strömungsbildes in der Nähe des schnell bewegten Geschosses bringt eine höchst verwickelte Verteilung der auf seinen Mantel wirkenden Drucke mit sich. Z. B. hat Mach bei Versuchen gefunden, dafs in der Nähe der Geschofsspitze auf eine Strecke von 13 mm ein Druckgefälle von über einer Atmosphäre kam. Die Gesamtheit solcher Druckwirkungen bestimmt aber erst physikalisch diejenige Gröfse, die wir mit dem schematischen Begriffe des Luftwiderstandes widerzugeben wünschen. Dafs sie einer Einzelkraft von spezieller Lage (durch den Schwerpunkt) äquivalent wäre, können wir nicht erwarten. Schon in dem viel einfacheren Falle des Körpers in der idealen inkompressibeln und reibungslosen Flüssigkeit, der sich allein vollständig hydrodynamisch behandeln läfst, treten im Allgemeinen Momente auf. Wenn wir nämlich oben sagten, dafs in diesem Falle der Translations- und Rotationsteil der Bewegung miteinander verkoppelt sind, so meint dies nichts anderes, als dafs die in Bewegung versetzte umgebende Flüssigkeit die Rotation des Körpers durch Druckmomente beeinflufst, sowie umgekehrt durch die Rotation Drucke hervorgerufen werden, die die fortschreitende Bewegung wie eine Einzelkraft beeinflussen. Im Falle der Ballistik ist die Koppelung beider Bestandteile natürlich nicht minder innig. Die Fiktion eines empirisch bekannten Luftwiderstandes soll dazu dienen, beide Bestandteile für sich betrachten zu können. Jedenfalls aber müssen wir dann ihrer Koppelung dadurch Rechnung tragen, dafs wir dem Luftwiderstande ein Moment um den Schwerpunkt geben.

Der Sinn des Luftwiderstandsmomentes. Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten vor dem Schwerpunkt. Der Sinn des Luftwiderstandsmomentes bestimmt sich unmittelbar durch

die bekannte Erfahrung, dafs ohne das Mittel der künstlichen Stabilierung durch den Drall das Geschofs sich überschlagen und sich senkrecht gegen die Bahn stellen würde, derart, dafs die Geschofsspitze sich aufrichtet, wenn sie oberhalb der Flugtangente liegt und sich nach unten neigen würde, wenn sie sich unter der Bahntangente befindet. Die fiktive Einzelkraft, die den Luftwiderstand ersetzen soll und die der Bewegungsrichtung annähernd entgegengerichtet ist, hat also ihren Angriffspunkt am vorderen Teil des Geschosses (vom Schützen aus gesehen hinter dem Schwerpunkt).

Durch allgemeine Erfahrungen bei langsam bewegten Flächen, die schief gegen ihre Bewegungsrichtung gestellt sind, ist uns diese Thatsache wohlbekannt. Sie bildet übrigens die Grundlage für die Theorie der Aviatik. Bei langsamen Bewegungen (klein gegen c), für die man die Luft als inkompressibel voraussetzen darf, kann man sich auch theoretisch davon Rechenschaft geben. Die auf Grund der idealen Hydrodynamik berechneten Strömungslinien um eine schief bewegte Platte verlaufen so, dafs sie für die Vorderseite der Platte einen Druckpunkt auf der nach vorn geneigten Plattenhälfte ergeben, der um so excentrischer liegt, je gröfser der Winkel zwischen Bewegungsrichtung und Plattennormale ist. Aus der vorangestellten ballistischen Thatsache dürfen wir schliefsen, dafs dasselbe Gesetz auch für grofse Geschwindigkeiten bestehen bleibt, trotz der alsdann zweifellos wesentlich abgeänderten Verteilung von Strömung und Druck.

Auch von einem ganz anderen Standpunkte aus hat man die in Rede stehende Thatsache zu verstehen gesucht. Sieht man von dem Wellenwiderstande ganz ab und denkt sich den Reibungswiderstand durch die Newton'sche Formel av^2 bestimmt, wobei für jedes Oberflächenelement als wirksame Geschwindigkeit die Normalkomponente der Translationsgeschwindigkeit in Rechnung gesetzt werden möge, so hat man über die Oberfläche verteilt ein System von Einzelkräften. Setzt man diese nach den Regeln der Statik zusammen, so ergiebt sich eine Resultierende, deren Angriffspunkt vor dem Schwerpunkt liegt. Dabei berücksichtigt man allerdings nur die Drucke auf der Vorderseite des Geschosses, d. h. auf den vom Luftstrom getroffenen Oberflächenteilen, und vernachlässigt, was eine gewisse Willkür ist, die auf der Rückseite gleichzeitig vorhandenen Saugwirkungen, deren Moment im entgegengesetzten Sinne wirken würde. Wir brauchen nach allem, was vorhergeht, kaum zu sagen, dafs wir diese Betrachtung ebenso wie die auf die Annahme der inkompressiblen Flüssigkeit basierte als einen vollgültigen Beweis der fraglichen ballistischen Thatsache nicht ansehen können.

Die Stabilierung des Geschosses durch Rotation. Eine der bekanntesten Thatsachen der Ballistik ist die, daſs das Langgeschoſs gegen Überschlagen durch eine rasche Rotation um seine Figurenaxe stabiliert werden kann. Die im gezogenen Lauf erzeugte Drehgeschwindigkeit ist der Abgangsgeschwindigkeit des Geschosses proportional und beträgt bei den Artilleriegeschossen über 100 Umdrehungen in der Sekunde, bei den Infanteriegeschossen sogar über 3000. Das dergestalt in einen *Kreisel* verwandelte Langgeschoſs (wir denken weiterhin an dasjenige der Artillerie) folgt natürlich nicht mehr dem Momente des Luftwiderstandes, sondern weicht senkrecht dagegen aus. Während bei dem nicht rotierenden Geschoſs das äuſsere Moment eine Drehung um die Querachse durch den Schwerpunkt hervorbringen würde, bewirkt es bei dem schnell rotierenden Geschoſs lediglich eine kleine Verlagerung des Drehimpulses.

Die deutschen Geschütze haben Rechtsdrall, d. h. jeder Punkt bewegt sich in einer Rechtsschraube. Von vorn gesehen findet also die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinne statt. Wollen wir den Drehimpuls in der Figurenaxe nach vorn auftragen, was sich der Anschaulichkeit wegen empfiehlt, so müssen wir von unserer allgemeinen Regel über den positiven Rotationssinn abgehen und als positive Drehung diejenige entgegen dem Uhrzeigersinne ansehen.

Nehmen wir zunächst etwa an, daſs sich die Flugbahntangente momentan gegen die Geschoſsaxe gesenkt habe. Dann wirkt das Moment des Luftwiderstandes als aufrichtendes Moment, also von der rechten Seite des Geschosses gesehen, im positiven Sinne; sein (mit dem betrachteten unendlich kleinen Zeitintervall multiplizierter) Momentenpfeil ist also an den Eigenimpuls des Geschosses (es handelt sich natürlich nur um den Rotationsbestandteil des Impulses, das „Impulsmoment“) nach rechts hin anzutragen, so daſs letzterer nach rechts hin abgelenkt wird. Liegt dagegen momentan etwa die Geschoſsaxe unter der Flugbahntangente, so wird entsprechend der Eigenimpuls nach links verlagert. Allgemein, können wir sagen, wandert der Impulsendpunkt wegen der Wirkung des Luftwiderstandsmomentes um die Flugbahntangente in demselben Sinne, wie die Eigendrehung des Geschosses erfolgt.

Weiterhin übertragen wir die Hauptresultate unserer Theorie der pseudoregulären Präcession auf den jetzigen Fall. Wir wissen, daſs bei rascher Rotation die Figurenaxe immer in der Nähe der veränderlichen Impulsaxe bleibt und daſs die Impulsaxe bei Vernachlässigung der unmerklichen Nutationen sich durchschnittlich auf einem Kegel um die Vertikale mit konstanter mittlerer Präcessionsgeschwindigkeit P/N

(vgl. pag. 303, Gl. (11)) bewegt. Der Kegel bleibt dauernd sehr eng, wenn zu Anfang die Figurenaxe in der Nähe der Vertikalen lag. Der Vertikalen, d. h. der Schwererichtung, entspricht hier die Richtung der fingierten Luftwiderstandsresultierenden, auf der die Axe des Luftwiderstandsmomentes senkrecht steht. Also wird auch im Falle der Ballistik die Figurenaxe des Geschosses die Luftwiderstandsresultierende, die ihrerseits immer nahezu in die Flugbahntangente fällt, umkreisen, und zwar in dem Sinne, in dem das Luftwiderstandsmoment den Impuls verlagert, d. h. im Sinne der Geschoſsrotation, und es werden sich die soeben besprochenen Momentanbewegungen der Impulsaxe zu einer Präcession oder, wie man in der Ballistik sagt, zu einer konischen Pendelung zusammensetzen. Der Öffnungswinkel der konischen Pendelung bleibt dauernd sehr klein, da im Momente des Abschieſsens die Figurenaxe mit der Flugbahntangente (bis auf einen kleinen „Abgangsfehlerwinkel“) zusammenfiel.

Natürlich ist unsere Übertragung der einfachen Kreiselresultate auf die komplizierten Verhältnisse der Ballistik nicht ohne Bedenken. Das Moment der Schwerewirkung war $P \sin\vartheta$, wo ϑ den Winkel zwischen Figurenaxe und Vertikaler bedeutete. Bezeichnen wir jetzt mit ϑ entsprechend den Winkel zwischen Geschoſsaxe und Luftwiderstand, so wird man den Ansatz für das Luftwiderstandsmoment etwa in der Form $P \sin\vartheta \cos\vartheta$ schreiben können. Letzteres verschwindet nämlich nicht nur für $\vartheta = 0$ aus Symmetriegründen, sondern auch für $\vartheta = \pi/2$, weil die Lage des Geschosses senkrecht gegen die Flugbahn die ohne Rotation stabile Gleichgewichtslage wäre, in der der Luftwiderstand ein verschwindendes Moment giebt. Der Faktor P hängt dabei in unbekannter Weise von der Geschwindigkeit der Translation und wohl auch von derjenigen der Rotation ab. Der analytische Ausdruck des Luftwiderstandsmomentes ist also ein anderer wie der des Schweremomentes in der gewöhnlichen Kreiseltheorie, so daſs auch die dynamischen Wirkungen in beiden Fällen nicht genau die gleichen sind, wobei man bemerken kann, daſs bei dauernd kleinem ϑ der hinzutretende Faktor $\cos\vartheta$ von keiner wesentlichen Bedeutung sein wird. Wichtiger aber ist, daſs die Flugbahntangente, die ja annähernd die Richtung der Luftwiderstandsresultanten angiebt, nicht wie die Vertikale raumfest ist, sondern durch die Schwere nach unten gedreht wird. Bei der vorstehenden Übertragung nahmen wir aber an, daſs die Figurenaxe des Geschosses gerade so um die veränderliche Luftwiderstandsrichtung mit kleiner Kegelöffnung herumkreist, wie die Figurenaxe des Kreisels um die feste Vertikale bei ursprünglich vorhandener annähernder Koincidenz. Dabei ist die Veränderlichkeit der

Flugbahntangente keineswegs gering; sie kann bei einem Steilschufs 90° und mehr betragen. Die theoretische Rechtfertigung unserer Übertragung müfste nachweisen, dafs die Flugbahntangente als langsam veränderlich verglichen mit den Geschofspendelungen anzusehen ist, so dafs die Figurenaxe in wiederholten Umkreisungen Zeit findet, sich der successive veränderten Lage der Bahntangente anzupassen. Indessen wollen wir hier auf jede theoretische Begründung verzichten und uns einfach auf die zweifellose, von Fachkreisen bestätigte Erfahrungsthatsache berufen, dafs das Geschofs im Allgemeinen (d. h. bei nicht zu steilem Abgangswinkel und bei normal konstruiertem Geschütz- und Geschofssystem) mit seiner Spitze aufschlägt (andernfalls würde ja die Zündung versagen!), dafs sich also die Geschofsaxe thatsächlich dauernd in der Nähe der Flugbahntangente oder der Luftwiderstandsresultanten hält. Diese Thatsache wird offenbar nur durch die konische Pendelung, d. h. durch das *Auftreten von energischen Kreiselwirkungen* ermöglicht.

Die Rechtsabweichung der Geschosse. Hierüber liegen folgende Erfahrungsthatsachen vor. Während bei den Infanteriegeschossen die Seitenabweichung klein ist, zeigt sich bei den Artilleriegeschossen mit Rechtsdrall eine beträchtliche und mit zunehmender Schufsweite zunehmende Rechtsabweichung, nämlich

bei einer Schufsweite von	500,	1000,	2000,	3000 m
eine Rechtsabweichung von	0,25,	1,1,	4,4,	11,5 m.

Übrigens wird bei den modernen Geschützen die Rechtsabweichung durch die Visierstellung von selbst mitkorrigiert.

Dafs wir in diesem Phänomen eine Folge der konischen Pendelung, also mittelbar eine Folge der Kreiselwirkungen zu sehen haben, ist sehr wahrscheinlich. Auch ist es bekannt, dafs bei Linksdrall die Rechtsabweichung in eine Linksabweichung übergeht (die italienische Artillerie hat Linksdrall). Eine genaue quantitative Theorie der Rechtsabweichung scheitert an unserer Unkenntnis des Luftwiderstandsgesetzes und wäre nur auf hydrodynamischer Grundlage zu erbringen. Auch bei Annahme eines empirischen und sicher unvollständigen Luftwiderstandsgesetzes (Einzelkraft von geeignet gewähltem Angriffspunkt) wird die Berechnung sehr umständlich und nur durch schrittweise Näherung möglich, wegen der Verkettung des Translations- und Rotationsbestandteils. Wir begnügen uns daher mit einem qualitativen Überschlag. Dabei gehen wir von der vorher begründeten Vorstellung aus, dafs die Geschofsaxe dauernd um die augenblickliche Lage der Luftwiderstandsresultanten mit durchschnittlich konstanter Winkelgeschwindigkeit im

Sinne der Eigenrotation herumkreist. Von der Flugbahntangente und der ihr annähernd folgenden Luftwiderstandsresultanten nehmen wir an, dafs sie sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit senkt, was für ein nicht zu langes Zeitintervall und unter vorläufiger Vernachlässigung der Seitenabweichung zulässig sein wird. Denken wir uns nun eine Zeichenebene senkrecht gegen die Luftwiderstandsresultante in irgend einem Augenblicke gestellt, so beschreibt der Durchstofsungspunkt O des Luftwiderstandes mit dieser Ebene eine nach unten gerichtete gerade Linie L mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Der Durchstofsungspunkt der Geschofsaxe mit derselben Ebene sei Q. Q bewegt sich beständig senkrecht zur Verbindungslinie OQ mit durchschnittlich konstanter Winkelgeschwindigkeit im Sinne des Uhrzeigers, wenn wir unsere Zeichenebene vom Geschütz aus betrachten. Wir haben somit ein einfachstes geometrisches Bild vor uns, aus dem sich die Bahn von Q sofort ergiebt. Diese wird ersichtlich eine *cykloidische Kurve*, wie sie beim Abrollen eines Rades auf einer Geraden entsteht. Dem Punkte O entspricht dabei der jeweilige Berührungspunkt des Rades, Q ist ein Punkt des Rades, als Rollbahn ist unsere Gerade L zu denken. Das abrollende Rad liegt, vom Geschütz aus gesehen, *rechterhand* von L, da sich das Rad ebenso wie der an ihm feste Punkt Q im Sinne des Uhrzeigers drehen und der Berührungspunkt O auf L nach unten fortschreiten soll. Je nachdem Q auf dem Umfange des Rades oder im Innern desselben oder im Äufsern liegt, entsteht eine gemeine Cykloide mit Spitzen oder eine gewellte Cykloide oder eine verschlungene, mit Schleifen verlaufende. In der That sind bei jeder cykloidischen Kurve die oben genannten Kriterien erfüllt, dafs sich Q um das momentane Drehzentrum des Rades O mit konstanter Geschwindigkeit dreht. Man vergleiche übrigens hierzu die ganz ähnliche Betrachtung von pag. 295 gelegentlich der Behandlung der pseudoregulären Präcession, bei der ebenfalls cykloidische Kurven auftraten, und die dortige Fig. 48, die wir uns jetzt im Uhrzeigersinn um 90^0 gedreht zu denken haben, mit dem Unterschiede, dafs das momentane Drehcentrum dort durch die jeweilige Lage der Impulsaxe gegeben war, hier durch diejenige der Luftwiderstandsrichtung.

Ob eine gemeine oder eine verschlungene Cykloide etc. entsteht, hängt von der Anfangslage des Punktes Q gegen O und der Präcessionsgeschwindigkeit von Q um O, sowie von der Senkungsgeschwindigkeit des Punktes O ab und bleibt bei unserer Betrachtung unbestimmt.*)

*) Herr Cranz findet in dem oben zitierten Lehrbuch der Ballistik, Teil 1, Nr. 52 bis 57, durch Näherungslösung als Bahnkurve eine gemeine Cykloide, deren

Wesentlich ist für uns nur ein allen drei Typen gemeinsamer Charakter: *die Bahnkurve von Q verläuft, vom Geschütz aus gesehen, durchschnittlich rechts von der Geraden O,* und zwar tritt sie bei der gemeinen und gewellten Cykloide überhaupt nicht auf die linke Seite von *O* herüber, während bei der verschlungenen Cykloide die nach links herübergreifenden Schleifen kürzer sind wie die nach rechts ansetzenden Bögen. Hiermit ist aber eine anschauliche Erklärung der Rechtsabweichung gegeben: *Indem sich die Geschofsspitze durchschnittlich rechts von der Vertikalebene durch die Flugbahntangente befindet, wird das Geschofs von dem Luftwiderstande nach rechts hinübergedrängt.* Es wird nämlich der Druck auf die linke Seite des Geschosses überwiegen, sodafs der Luftwiderstand mit einer kleinen Komponente seines Gesamtbetrages direkt auf die seitliche Schwerpunktsbewegung einwirkt und die Flugbahn nach rechts ablenkt.

Als qualitative Erklärung der Rechtsabweichung wird diese sehr oberflächliche Betrachtung genügen können. Dafs eine quantitative Behandlung derselben Thatsache unmöglich ist und dafs sich überhaupt, wie kaum zu leugnen ist, das ballistische Problem noch in einem sehr unbefriedigenden Zustande befindet*), liegt nicht, wie wir nochmals hervorheben möchten, an der Kreiseltheorie, die alle an sie zu stellenden Fragen in bestimmter und anschaulicher Weise beantwortet, sondern an der Hydrodynamik mit ihren weitaus komplizierteren Verhältnissen und ihren unendlich vermehrten Bewegungsmöglichkeiten.

Bis über die Mitte des 19. Jahrhunderts hinaus hatte die altehrwürdige Mechanik die unbestrittene Führung sowohl in der theore-

Bögen sich allmählich erweitern; diese Erweiterung konnte aber bei unserer Darstellung nicht in Erscheinung treten, da wir näherungsweise die Geschwindigkeit, mit der sich die Flugbahntangente senkt (d. h. die des Punktes *O*), als gleichförmig annahmen. Andere Autoren (vgl. die Litteratur bei Cranz l. c.) wurden bei etwas abweichender Berechnung auch auf verschlungene oder gewellte Cykloidenbahnen geführt. Auch Cranz weist (Nr. 57, l. c.) auf die Unsicherheit der theoretischen Berechnung und auf die Notwendigkeit von systematischen Experimenten hin.

*) Ein Erfolg versprechendes Hilfsmittel der experimentellen Ballistik scheint die photographische Aufnahme der Geschofsbewegung zu sein. F. Neesen hat einerseits versucht, die konische Pendelung auf Platten im Innern des Geschosses aufzuzeichnen und die erhaltenen Kurven im Sinne der Theorie als Cykloiden von allerdings sehr unregelmäfsigem Charakter gedeutet, andererseits auch eine Methode angegeben, um die Stellung des Geschosses direkt von aufsen aufzunehmen, doch sind abschliefsende Resultate wegen ungünstiger Versuchsbedingungen in beiden Richtungen noch nicht erzielt worden. Vgl. Archiv f. Artillerie- und Ingenieuroffiziere, 53. Jg. 1889 und Kriegstechnische Zeitschrift 1903.

tischen Auffassung der Natur, wie in der praktischen Verwertung ihrer Kräfte. Im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts aber mußte sie mehr und mehr ihrer jüngeren Rivalin, der Elektricität, weichen. Die theoretische Elektrodynamik führte tiefer in die Erkenntnis der Natur, wie die rein-mechanische Betrachtung, und die Elektrotechnik eröffnete mannigfachere und kühnere Möglichkeiten der Energieverwertung und -übertragung, wie die alten mechanischen Konstruktionen. Es hat den Anschein, als ob im 20. Jahrhundert die mechanische Technik, unter anderem durch die Verwertung des Kreiselprinzips, neue Aufgaben mit verjüngten Kräften angreifen wolle, wobei allerdings nicht zu vergessen ist, daſs sie ein wichtiges Hülfsmittel, den Kreiselantrieb, in den meisten Fällen gerade von ihrer Rivalin, der Elektrotechnik, erborgen muſs. Offenbar stehen wir erst im Anfange dieser Entwicklung; die hier sich bietenden Möglichkeiten sind mit den im Vorstehenden dargestellten Konstruktionen wohl noch lange nicht erschöpft.

Zusätze und Ergänzungen.

Zum Vorwort.

Der am Schlufs zitierte Ausspruch Sir John Herschel's findet sich in den Outlines of Astronomy, London 1850, Chapter V, Nr. 317.

Auch in England ist neuerdings eine Monographie über den Kreisel erschienen: H. Crabtree, An elementary treatment of the theory of spinning tops and gyroscopic motion, Longmans, Green, Co., London 1909. Hier wird der auch in unserem Vorwort empfohlene Weg zur Erklärung der Kreiselerscheinungen eingeschlagen, der den Ausgang von den Impulssätzen nimmt. Systematischer und ausführlicher in der Begründung als der bekannte Vortrag von Perry (vgl. Anm. auf pag. 134) gelangt das Buch zur Berechnung der allgemeinen Kreiselbewegung und zur Beschreibung einiger technischer Anwendungen, wie des Schiffskreisels und der Einschienenbahn. Es ist besonders reichhaltig an Beispielen aus dem täglichen Leben, deren wesentliche dynamische Züge treffend hervorgehoben werden, macht aber natürlich bei dem weit beschränkteren Raum sowie dem durchweg elementaren Charakter keinen Anspruch auf die Vollständigkeit, die wir mit weitergehenden analytischen Hilfsmitteln erstrebten.

Zur Einleitung.

Zu den in der Einleitung genannten Lehrbüchern für Mechanik tritt nun noch das besonders empfehlenswerte, reichhaltige Buch von A. G. Webster: The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies, Leipzig 1904, in dem auch die Kreiseltheorie und einige ihrer Anwendungen reichlichen Raum gefunden haben. Eine deutsche Bearbeitung des Buches von C. H. Müller unter dem Titel: „Lehrbuch der Mechanik als Einführung in die theoretische Physik", in zwei Teilen, ist in Vorbereitung und erscheint demnächst im gleichen Verlage.

In sachgemäfsester Weise behandeln die technischen Fragen der Mechanik natürlich die „Vorlesungen über technische Mechanik" von A. Föppl, deren sechster Band (Leipzig 1910) auch die Kreiseltheorie, insbesondere als typisches Beispiel die vom Verfasser aufgestellte Theorie des Schiffskreisels ausführlich erörtert.

Einen kurz zusammenfassenden, aber inhaltsreichen Bericht über die Kreiseltheorie liefert A. G. Greenhill: Gyroscop and Gyrostat, Encyclopaedia Britannica, Suppl. 29, 1902. Bezüglich der historischen Entwicklung der Kreiseltheorie verweisen wir auch auf dessen Vortrag: The mathematical theory of the top, considered historically, Verhandlungen des 3. internationalen Mathematikerkongresses, Heidelberg 1904. Man vergl. auch die reichhaltigen historischen Nachweise in P. Stäckel's Encyklopädie-Artikel Bd. IV, 6; der Freundlichkeit von Herrn Stäckel verdanken wir eine Reihe der folgenden Berichtigungen.

Zu Kap. I.

Zu pag. 14. Die Euler'schen Winkel treten wohl zuerst 1748 auf in Euler's Introductio in analysin infinitorum, vgl. P. Stäckel, Elementare Dynamik, Encykl. d. Math. Wiss. IV 6, Nr. 28 a.

Zu pag. 22, Gl. (10) und pag. 57, Gl. (2). Die Transformationsformeln (2) hat kürzlich in elementarer Weise A. Schoenfliefs abgeleitet auf Grund der Thatsache, dafs sich jede Drehung im R_3 aus zwei Wendungen (Drehungen um 180^0) oder auch aus zwei Spiegelungen zusammensetzen läfst. (Rend. del Circolo matematico di Palermo, t. 29, 1910.)

Zu pag. 61. Das vektorielle Produkt, wie es in der Vektoranalysis üblich ist, ist nicht identisch mit dem „äufseren Produkt" Grafsmann's (die Ausdrucksweise des Textes, Zeile 9 von unten, ist in dieser Hinsicht ungenau), sondern mit der Grafsmann'schen „Ergänzung des äufseren Produktes". Das vektorielle Produkt ist ein (axialer) Vektor, das äufsere Produkt dagegen ein „Bivektor" (d. h. hier ein Flächenstück), erst seine Ergänzung (die auf dem Flächenstück errichtete mit Umlaufssinn versehene Normale) ein axialer Vektor. Die Grafsmann'sche Theorie geht bei der Aufzählung der Raumgröfsen systematisch, die physikalische Vektorrechnung opportunistisch vor. Letztere sieht auch vielfach von dem prinzipiellen Unterschied zwischen polaren Vektoren (Vektoren erster Art) und axialen Vektoren (Vektoren zweiter Art) ab, was nur so lange zulässig ist, als nur Drehungen des Koordinatensystems, keine Spiegelungen oder Inversionen benutzt werden. Man vgl. hierzu Encyklopädie der math. Wiss. IV, 14 (Art. Abraham), Nr. 2, 3; R. Mehmke: Jahresbericht d. d. Math.ver. 13, 1904, pag. 217; L. Prandtl: ibid. pag. 436. In der von Minkowski verwendeten vierdimensionalen Vektoranalysis der Relativitätstheorie (vgl. unten) tritt der Unterschied zwischen den Vektoren erster und zweiter Art schärfer hervor, indem die ersteren vierkomponentig, die letzteren aber sechskomponentig werden.

Zu pag. 64, Gl. (13). Mittels der Gl. (13) hat kurze Zeit vor der auf pag. 64 zitierten Arbeit von Cayley schon Hamilton die Drehungen um einen Punkt im R_3 auf Quaternionenmultiplikation zurückgeführt. Proc. Irish. Academy 11. Nov. 1844.

Diese Gleichung, durch die wir eine beliebige Drehstreckung des x, y, z Raumes um den Anfangspunkt $x = y = z = 0$ in kompendiösester Form darstellten, ist ein Sonderfall einer allgemeineren Darstellung, die die Drehungen eines vierdimensionalen Raumes um einen festen Punkt, oder auch, bei Benutzung homogener Koordinaten, unter anderem die ∞^6 Drehungen und Verschiebungen des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes umfaſst. Für diese Transformationsgruppen liefert die in Rede stehende Verallgemeinerung von Gl. (13) zugleich eine sehr einfache rationale Darstellung durch 6 Parameter (bzw. 7, wenn auch Drehstreckungen des R_4 mit einbegriffen werden). Die allgemeinere Formel hat überdies den Vorteil gröſserer Symmetrie und Übersichtlichkeit.

Ihre einfache Grundlage ist der mehrfach benutzte Satz, daſs der Tensor eines Quaternionenproduktes gleich ist dem Produkt aus den Tensoren seiner Bestandteile, unter dem Tensor einer Quaternion

$$Q = Ai + Bj + Ck + D$$

die früher auch als Streckung bezeichnete Gröſse

$$T = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}$$

verstanden. (Diese von Hamilton eingeführte Bezeichnung (vgl. pag. 58) hat natürlich nichts mit dem in der mathematischen Physik heute üblichen Tensorbegriff zu tun.)

Sei nun eine Quaternion gegeben:

$$v = xi + yj + zk + u,$$

und eine zweite durch das Quaternionenprodukt definiert:

$$(1) \qquad V = Xi + Yk + Zj + U = Q_1 v Q_2$$
$$= (A_1 i + B_1 j + C_1 k + D_1)(xi + yj + zk + u)(A_2 i + B_2 j + C_2 k + D_2).$$

Hiernach sind offenbar die Gröſsen X, Y, Z, U als homogene lineare Funktionen der Gröſsen x, y, z, u bestimmt, und es besteht die Beziehung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 = T_V^2$$
$$= (A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2 + D_1{}^2)(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)(A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2 + D_2{}^2)$$
$$= T_1{}^2 T_v{}^2 T_2{}^2.$$

Wir brauchen hier nur zu fordern, dafs

(2) $$T_1^2 T_2^2 = 1$$

sein soll, so stellen die linearen Transformationsformeln zwischen X und x eine orthogonale Transformation des x, y, z, u Raumes dar, die ja bekanntlich durch die Bedingung

(3) $$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$

definiert ist. Sie ist eine Drehung, denn ihre Determinante ist $+1$, wie man durch Einzelmultiplikation mit Q_2 und Q_1 leicht nachrechnet. Die Transformationsformeln enthalten zunächst die acht Koeffizienten der Quaternionen Q_1 und Q_2 als Parameter, zwischen denen aber die Bedingung (2) besteht. Da ferner in der Gl. (1) nur das Produkt der Quaternionen Q_1 und Q_2 vorkommt, so bleibt sie unverändert, wenn man Q_1 mit einem skalaren Faktor λ multipliziert und Q_2 mit dem nämlichen Faktor dividiert, man kann diesen Faktor z. B. so wählen, dafs

$$\lambda^2 T_1^2 = \frac{1}{\lambda^2} T_2^2 = 1$$

wird, und hat dann die Drehung des R_4 durch die sechs Parameter der zwei Einheitsquaternionen λQ_1, Q_2/λ in einfachster Weise definiert. Wesentlich ist, daß sich diese Darstellung unmittelbar in rationaler Form geben läßt, wie wir unten noch zeigen werden.

Läfst man dagegen die Koeffizienten von Q_1 und Q_2 beliebig, so enthält das Quaternionenprodukt (1) sieben Parameter; in diesem Falle führt Gl. (1) auf die „Drehstreckungen des R_4“. Die Formel (13) ergibt sich hieraus offenbar für die spezielle Bestimmung

$$Q_2 = T_1 Q_1^{-1}$$

und liefert aufser den Transformationsgleichungen (2) von pag. 57 dann noch die Beziehung $U = u$.

Wenn wir alle Koeffizienten der Quaternionen Q_1, Q_2, v und V und also auch λ als reelle Gröfsen betrachten, so sind durch Gl. (1) und (2) die reellen Drehungen im R_4 dargestellt; wir wollen sie im Anschlufs an eine übliche Ausdrucksweise der projektiven Maßgeometrie als die „elliptischen“ Drehungen bezeichnen. Neben diese stellen wir eine andere Gruppe von Kollineationen des R_4, die „hyperbolischen“ Drehungen, indem wir $u = \omega s$ setzen und s als reell annehmen, wo $\omega = \sqrt{-1}$ (oder allgemeiner die Quadratwurzel aus einer negativen Gröfse) sein soll. Dann ist die Bedingung erfüllt:

(3') $$X^2 + Y^2 + Z^2 + \omega^2 S^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2 s^2,$$

die ausdrückt, daß ein reeller Kegel bei der Transformation unverändert bleibt, was eben die hyperbolischen Drehungen charakterisieren mag.

Um in diesem Fall reelle Transformationsformeln zu erhalten, mufs man, wie sich durch nähere Berechnung leicht ergibt, die beiden Quaternionen Q_1 und Q_2 als „konjugierte" wählen, die so zu definieren sind:

$$(4)\quad \begin{cases} Q_1 = (+Ai + Bj + Ck + D) + \omega(A'i + B'j + C'k + D'), \\ Q_2 = (-Ai - Bj - Ck + D) + \omega(A'i + B'j + C'k - D'). \end{cases}$$

Die Transformationsformeln würden allgemeiner auch dann reell ausfallen, wenn Q_2 um einen reellen Faktor von dem in (4) angegebenen Ausdruck verschieden wäre; alle möglichen Transformationen zerfallen hiernach in zwei Arten, je nachdem ob dieser Faktor positiv oder negativ ist. Die der ersten Art bilden für sich eine Gruppe, bei den letzteren ist charakteristisch, daß $\partial S/\partial s$ immer negativ ist; es ist daher nicht möglich, daß diese zweite Art die identische Substitution oder unendlich kleine Drehungen enthält. Deshalb wird es zweckmäßig sein, in der Definition der hyperbolischen Drehungen sich auf die erstere Gruppe zu beschränken und also bei geeigneter Normierung nur die Formeln (4) ins Auge zu fassen. Für die unten zu besprechenden Lorentztransformationen bedeutet dies die naturgemäße Beschränkung, daß die Zeitskala in allen betrachteten Koordinatensystemen gleichgerichtet sein soll.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann auch in (4) ein Faktor λ bzw. $1/\lambda$ so gewählt werden, dafs $T_1^2 = T_2^2$ wird. Damit auch λQ_1 und Q_2/λ konjugiert sind, mufs jetzt λ eine komplexe Gröfse $a + \omega b$ vom absoluten Betrag $\sqrt{a^2 - \omega^2 b^2} = 1$ sein. Denken wir uns der Einfachheit halber die Quaternionen Q_1 und Q_2 schon so normiert, so besteht also die Bedingung

$$(4')\qquad AA' + BB' + CC' + DD' = 0.$$

Jetzt ist es leicht zu sehen, dafs wir mittels der Quaternionenparameter zu einer rationalen Darstellung der Drehungen gelangen. Um nämlich die Bedingung (2) identisch zu erfüllen, setzen wir statt (1) die Transformationsgleichung an:

$$(1')\qquad (Xi + Yj + Zk + \omega S) = \frac{Q_1\,(xi + yj + zk + \omega s)\,Q_2}{T_1\,T_2},$$

wo aber nun wegen (4′)

$$T_1 T_2 = T_1^2 = T_2^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \omega^2(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2),$$

also rational in den Parametern $A, A' \ldots$ wird.

Nach (4′) ist nun ferner etwa D' ein rationaler, homogener Ausdruck ersten Grades in den sieben übrigen Parametern, führt man ihn in die rechte Seite von (1′) ein, so wird diese, da sie in den acht Parametern von Q_1 und Q_2 homogen vom Grade Null ist, eine Funktion

bloſs der sechs Verhältnisse von A, A', B, B', C, C', D, und (1') führt also in der That zu einer rationalen Darstellung der hyperbolischen Drehungen durch sechs Parameter.

Diese hyperbolischen Drehungen stehen nun in naher Beziehung zu Fragen der modernen Physik, zu denen die Entwicklung der Elektrodynamik geführt hat; dies war für uns der Anlaſs, sie hier zu besprechen. Wir gewinnen für die Wahl $\omega^2 = -c^2$, wo c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, eine rationale Darstellung für den wesentlichen Bestandteil in der Gruppe der von Poincaré sogenannten „Lorentztransformationen", die nur noch durch Hinzunahme einer willkürlichen Verschiebung des Anfangspunktes zu vervollständigen ist. Sie spielt für die Elektrodynamik und die an diese sich anschlieſsenden Fragen die gleiche Rolle, wie für die klassische Mechanik die Gruppe, die sich aus den einmaligen Drehungen und Verschiebungen des Koordinatensystems und den gleichförmigen Translationen desselben zusammensetzt, indem sich die elektrodynamischen Grundgleichungen invariant verhalten, wenn die Lorentztransformationen auf die Raumkoordinaten x, y, z und die Zeitkoordinate s angewendet werden. Diese Invarianz ermöglicht eine systematische Entwicklung der Elektrodynamik bewegter Medien, wie sie durch das „Relativitätsprinzip" gefordert wird. Ihre physikalische Bedeutung wurde erkannt durch die Arbeiten von H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895 (2. Auflage Leipzig 1906); A. Einstein, Annalen der Physik 17, 1905, pag. 891. Die Gruppeneigenschaft der Lorentztransformationen betont zuerst H. Poincaré, Rend. del circolo mat. di Palermo, 21, 1906, pag. 129; vom Standpunkt der vierdimensionalen Vektorauffassung endlich, zu der die obige Darstellung einen Beitrag liefern soll, gehen die Entwicklungen von H. Minkowski aus: Göttinger Nachrichten 1908, pag. 53 und dessen Vortrag: Raum und Zeit, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 18, 1908.

Geht man in den Gleichungen (4) zu dem Grenzfall $\omega^2 = 0$ über und läſst zugleich s und S von der Ordnung $1/\omega^2$ unendlich werden, so erhält man eine Gruppe von Transformationen, bei denen $\omega^2 s = \omega^2 S$ und die als „parabolische" Drehungen des R_4 bezeichnet werden können. Deutet man nämlich die Transformationsformeln im R_3, als dessen Koordinaten man die Quotienten $x/\omega^2 s$, $y/\omega^2 s$, $z/\omega^2 s$ ansieht, so stellen sie die Gruppe der ∞^6 linearen Orthogonaltransformationen unserer gewöhnlichen (der parabolischen) Geometrie, der Drehungen und Verschiebungen, dar. Bei der gleichen Abbildung würden die vorher behandelten elliptischen und hyperbolischen Fälle auf die linearen Orthogonaltransformationen des R_3 führen, die zu elliptischer, bzw.

hyperbolischer Maſsbestimmung gehören; bekanntlich versteht man ja darunter die Kollineationen, bei denen eine imaginäre (Gl. 3) bzw. reelle (Gl. 3') Fläche zweiter Ordnung unverändert bleibt.

Zu den „parabolischen“ Drehungen des R_4 führt endlich auch der Grenzfall, in dem ω^2 unendlich wird und zugleich A', B', C', D' von der Ordnung $1/\omega^2$ verschwinden, während jetzt x, y, z, s endlich bleiben, und zwar $s = S$ wird. Man erhält noch eine weitere Deutung dieser Gruppe, wenn man $s (= S)$ als Zeitkoordinate, dagegen x, y, z bzw. X, Y, Z als Raumkoordinaten auffaſst. Fügt man nämlich noch eine willkürliche Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes der Raum- und Zeitmessung zu, so resultiert die schon oben erwähnte ∞^{10} fache Gruppe, zu der sich die Newton'sche Mechanik invariant verhält, sie bildet in der That den Grenzfall der Lorentzgruppe bei unendlich groſser Lichtgeschwindigkeit c. Als Untergruppe ist hierin natürlich wieder die Gruppe der Drehungen im R_3 enthalten, für die A', B', C', D' identisch verschwinden, wobei unsere allgemeineren Gleichungen (1) und (4) in die frühere (13) ausarten.

Die Gleichungen (4), (4'), (1') umfassen auch die vorher behandelten „elliptischen“ Drehungen, nämlich für positive Werte von ω^2, also reelle Werte von ω, für die die konjugierten Quaternionen Q_1, Q_2 zu zwei beliebigen reellen Quaternionen werden. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann man also sagen, daſs die charakteristischen Unterfälle:

$$\omega^2 = 1, \qquad \omega^2 = -1, \qquad \omega^2 = 0 \text{ oder } \infty$$

gerade die elliptischen, hyperbolischen, parabolischen Drehungen des R_4, bzw. die allgemeinen linearen Orthogonaltransformationen des R_3 bei entsprechender Maſsbestimmung repräsentieren.

Die Verwendung der Quaternionen zur Darstellung der Drehungen im R_4 hat zuerst Cayley bemerkt, unter Beschränkung auf den elliptischen Fall (1). (On the homographic transformation of a surface of the second order into itself, Philos. magazine VII, 1854, papers, t. II p. 135, und Recherches ultérieures sur les déterminants gauches, Journal f. Math. t. 50, 1855, papers t. II p. 202.) Die geometrische Deutung hat Klein hinzugefügt (Zur nicht-euklidischen Geometrie, Math. Annalen 37, 1890). Der allgemeine Ansatz rührt von Clifford her (Preliminary sketch of biquaternions, Proceedings of the London Math. Society, Vol. IV, 1873, papers London 1882, p. 181) und ist durch Study systematisch entwickelt worden (Von den Bewegungen und Umlegungen, II, Math. Annalen 39, 1891). Wegen der ferneren Litteratur vergleiche man die Zitate bei Study, Encykl. d. math. Wiss. I, A, 4, insbesondere Nr. 35 der französischen Ausgabe des Artikels (dort I, 5).

Zu pag. 68. Die Schlufsbemerkung über „invariantes Denken und invariantes Rechnen“ möchten wir heutzutage nach der Bedeutung, die die Vektorrechnung inzwischen gewonnen hat (vgl. auch den Zusatz zu pag. 142), jedenfalls nicht in dem Sinne aufgefafst wissen, dafs das invariante vektorielle Rechnen als etwas Nebensächliches erscheint.

Zu Kap. III.

Zu pag. 138. Es scheint uns, dafs die Ableitung der Euler'schen Gleichungen auf S. 138 f. noch nicht mit der wünschenswerten Übersichtlichkeit erkennen läfst, dafs sie in der That nichts anderes als ein analytischer Ausdruck für die Impulsgesetze sind. Deshalb möge die Ableitung hier in knapperer Form nochmals folgen, wobei wir die Schreibweise der Vektorrechnung benutzen.

Wegen der Rotation R hat ein beliebiger im Kreisel fester Punkt, dessen Koordinaten x, y, z wir in üblicher Weise durch den vom Anfangspunkt aus gezogenen Vektor $\mathfrak{r}$ bezeichnen, nach dem Schema (3) auf pag. 41 die Geschwindigkeit $U = V(R\mathfrak{r})$ im Raume, unter dem Symbol V wie auf pag. 138 den auf pag. 61 erklärten Begriff des vektoriellen Produktes verstanden.*) Andererseits bewegt sich ein beliebiger im Raume fester Punkt $\mathfrak{r}'$ mit der Geschwindigkeit

$$U' = -V(R\mathfrak{r}') = V(\mathfrak{r}'R)$$

gegen den Körper. Ein solcher Punkt ist der Impulsendpunkt J im kräftefreien Fall. Deshalb folgt für dessen Geschwindigkeit relativ zum Körper:

$$U' = \frac{dJ}{dt} = V(JR),$$

also die Gl. (2) von pag. 140. Ist andererseits der betrachtete Punkt im Raume nicht fest, sondern hat die Geschwindigkeit W, so hat er im Körper die Geschwindigkeit $U' + W$. Für den Impulsendpunkt ist diese Geschwindigkeit W auf Grund des zweiten Impulsgesetzes gleich dem Moment der Kräfte, Δ, es folgt daher die Gl. (3), pag. 141:

$$\frac{dJ}{dt} = V(JR) + \Delta,$$

die nach (3′) und (3″) eben das System der Euler'schen Gleichungen in vektorieller Fassung bedeutet.

Die Euler'schen Gleichungen sind hiernach ein prägnantes Beispiel für ein Gleichungssystem, dessen eigentliches Wesen in seinem Vektorcharakter liegt. Überhaupt ist die Vektorentheorie gerade derjenigen Form der Fragestellung angepafst, die wir an die Spitze der Behand-

*) Statt $V(R\mathfrak{r})$ ist jetzt die Schreibweise $[R\mathfrak{r}]$ üblicher.

lung des starren Körpers stellten: der Frage nach den Verlagerungen des Impulsvektors. Dafs wir von der Benutzung dieser Rechnungsart absahen, liegt wesentlich daran, dafs sie sich erst im Laufe der letzten zehn Jahre mehr und mehr eingebürgert hat, insbesondere seit sie sich in der theoretischen Elektrodynamik als unentbehrliches Hilfsmittel erwiesen hat. Man darf allerdings bei ihrer Einschätzung nicht übersehen, dafs für die wirkliche Behandlung der Gleichungen, besonders ihre Integration, der Übergang zu den Koordinatengleichungen doch meist erforderlich wird. In konsequenter Weise wird die Vektorrechnung für die Kreiseltheorie in einigen neueren Arbeiten benutzt, wir nennen: Föppl, Lösung des Kreiselproblems mit Hilfe der Vektorenrechnung, Ztschr. f. Math. u. Phys., 48, 1903; Stübler, Der Impuls bei der Bewegung eines starren Körpers, ibid. 54, 1907.

Zu pag. 142. Die einfache Auffassung der Euler'schen Gleichungen als Ausdruck für die Impulssätze findet sich kurz vor Hayward (1856) schon bei Saint-Guilhem, Journ. de math. (1), 16, p. 347 (1851), und ibid. (1), 19, p. 346 (1854). Für die Geschichte der Euler'schen Gleichungen vgl. Encykl. d. math. Wiss. IV, 6 (Art. Stäckel), Nr. 30.

Zu Kap. V.

Zu pag. 315. Das Moment $Cr\vartheta'$, das wir in Kap. III, § 5 als Deviationswiderstand, bei den späteren Anwendungen als Kreiselwirkung bezeichnen, nennt Herr Koppe „induzierte Kraft" in der auf pag. 315 in der Fufsnote ††) zitierten Arbeit, wo auf die Wichtigkeit dieses Moments zum elementaren Verständnis der Kreiselerscheinungen hingewiesen ist. Koppes Hinweis steht in vollem Einklang mit unserer eigenen Auffassung (vgl. die Überschrift von § 1, Kap. IX, wo die fragliche Formel kurzweg als die wichtigste der Kreiseltheorie bezeichnet wird, sowie alle folgenden technischen Anwendungen, bei denen durchgehends diese Formel, bzw. ihre Verallgemeinerung, benutzt wird). In einer Besprechung der ersten beiden Hefte unseres Buches (Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, Nov. 1898) und in den Berichten der Berliner mathematischen Gesellschaft, 1, 1902 hat Herr Koppe eine nochmalige vereinfachte Ableitung dieses Moments gegeben, die mit der unsrigen wesentlich übereinstimmt und mit der wir also durchaus einverstanden sind.

Zu pag. 337. Von der asymptotischen Bewegung des „aufrechten" Kreisels, die für unser nachfolgendes Stabilitätskriterium wesentlich wird, ist angegeben, dafs sie bisher eigentümlicher Weise nicht bemerkt zu sein scheint. Demgegenüber ist auf A. G. Greenhill, Applications of elliptic functions, London 1892, pag. 243, § 226 E, hinzuweisen;

hier wird die Möglichkeit der elementaren Berechnung der betreffenden Bahnkurve dargethan, dem Umstande entsprechend, dafs ein sogenannter pseudo-elliptischer Fall vorliegt; der gestaltliche, asymptotische Charakter der Bewegung wird dort aber nicht näher diskutiert.

Zu pag. 341. Die durch die Formeln (20) dargestellten Bewegungskurven können, wie Herr Koppe in der zitierten Besprechung bemerkt, und wie auch aus den nach der Methode der kleinen Schwingungen abgeleiteten Gleichungen (10), pag. 368, folgt, in den stabilen Fällen $N^2 - 4AP > 0$ ebenfalls als Epi- oder Hypocykloiden (nämlich als Überlagerung zweier ungedämpfter Zirkularschwingungen) aufgefafst werden. Allerdings nehmen sie nur dann diese einfache Form an, wenn man Glieder von der Ordnung ε, die zugleich die von $1-u$ ist, neben den Gliedern der Ordnung $\sqrt{\varepsilon}$, bzw. $\sqrt{1-u}$ vernachlässigt. Mit dieser Einschränkung können wir also auch hier der Bemerkung von Herrn Koppe beistimmen. Die Geschwindigkeiten der Präcession und Nutation sind von den bei beliebiger Neigung der Figurenaxe eintretenden verschieden.

(Man erkennt die Überlagerung, wenn man die in (20) dargestellte Kurve durch senkrechte Projektion (die in dem vorliegenden Falle, wo die Kurve ganz in der Nähe des Nordpols verläuft, mit der stereographischen vom Südpol aus zusammenfällt) auf die Horizontalebene abbildet. In der Abbildung wird

$$r^2 = \sin^2 \vartheta = 1 - u^2 = (1+u)(1-u),$$

also, da u nahezu gleich 1 ist, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$r^2 = 2(1-u) = 2\left(1 - u_0 - \varepsilon \sin\frac{\pi t}{\omega}\right).$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dafs $1-u_0$ und ε als kleine Gröfsen zweiter Ordnung in den linearen Dimensionen aufzufassen sind. Wir schreiben daher die zweite Gleichung von (20) mit Unterdrückung aller Glieder, die als von zweiter Ordnung erkenntlich sind:

$$2\psi = \frac{n+N}{2A}t + \operatorname{arctg}\frac{w_1}{w_2}$$

mit den Abkürzungen

$$w_1 = \varepsilon - (1-u_0)\sin\frac{\pi t}{\omega},$$

$$w_2 = \sqrt{(1-u_0)^2 - \varepsilon^2}\cos\frac{\pi t}{\omega}.$$

Nun bilden wir:

$$(x+iy)^2 = r^2 e^{2i\psi},$$

wo x und y die Koordinaten der Kreiselspitze in der Horizontalprojektion bedeuten, mittels der Identität:

$$e^{i \operatorname{arctg}\frac{w_1}{w_2}} = \frac{w_2 + iw_1}{\sqrt{{w_1}^2 + {w_2}^2}}.$$

Hier ist

$$\sqrt{w_1^2+w_2^2}=\sqrt{\varepsilon^2-2\varepsilon(1-u_0)\sin\frac{\pi t}{\omega}+(1-u_0)^2\sin^2\frac{\pi t}{\omega}+((1-u_0)^2-\varepsilon^2)\cos^2\frac{\pi t}{\omega}}$$

$$=\sqrt{\varepsilon^2\sin^2\frac{\pi t}{\omega}-2\varepsilon(1-u_0)\sin\frac{\pi t}{\omega}+(1-u_0)^2}.$$

$$=1-u_0-\varepsilon\sin\frac{\pi t}{\omega}=\frac{r^2}{2}$$

Also wird

$$r^2e^{2i\psi}=2e^{i\frac{n+N}{2A}t}\left[\sqrt{(1-u_0)^2-\varepsilon^2}\cos\frac{\pi t}{\omega}+i\left(\varepsilon-(1-u_0)\sin\frac{\pi t}{\omega}\right)\right].$$

Durch Einführung zunächst des Arguments $\pi/2-\pi t/\omega$ und Übergang zur Hälfte dieses Arguments lautet die [—] in dieser Gleichung

$$2\sqrt{(1-u_0)^2-\varepsilon^2}\sin\frac{\pi(\omega-2t)}{4\omega}\cos\frac{\pi(\omega-2t)}{4\omega}$$

$$+i\left[\varepsilon-(1-u_0)\left(\cos^2\frac{\pi(\omega-2t)}{4\omega}-\sin^2\frac{\pi(\omega-2t)}{4\omega}\right)\right]$$

$$=i\left(\sqrt{1-u_0+\varepsilon}\sin\pi\frac{\omega-2t}{4\omega}-i\sqrt{1-u_0-\varepsilon}\cos\pi\frac{\omega-2t}{4\omega}\right)^2.$$

Endlich

$$re^{i\psi}=2\sqrt{i}\,e^{i\frac{n+N}{4A}t}\left(\sqrt{1-u_0+\varepsilon}\sin\pi\frac{2t-\omega}{4\omega}+i\sqrt{1-u_0-\varepsilon}\cos\pi\frac{2t-\omega}{4\omega}\right).$$

Statt dessen kann noch geschrieben werden:

$$x+iy=(\sqrt{1-u_0+\varepsilon}+\sqrt{1-u_0-\varepsilon})\,e^{i\left(\frac{n+N}{4A}+\frac{\pi}{2\omega}\right)t}$$

$$+(\sqrt{1-u_0+\varepsilon}-\sqrt{1-u_0-\varepsilon})\,e^{i\left(\frac{n+N}{4A}-\frac{\pi}{2\omega}\right)t}.$$

In den stabilen Fällen $N^2-4AP>0$ ist nun ω nach (17) pag. 339 reell und daher durch die obigen Gleichungen die Bahn der Kreiselspitze in der That als Superposition zweier reinperiodischer Zirkularschwingungen, d. h. als Epi- oder Hypocykloide, dargestellt.)

Zu § 6. Den Begriff der Stabilität behandelt eine wichtige Arbeit von D. J. Korteweg: Über Stabilität periodisch ebener Bahnen, Sitzungsber. d. Wiener Akad., Mai 1886, die die Verfasser seinerzeit leider übersehen hatten.

Die Korteweg'sche Definition der Stabilität deckt sich mit der Routh'schen. Gegen die Definition von Thomson und Tait macht Korteweg denselben Einwand, der hier pag. 348 Anm. erhoben ist. Die Notwendigkeit der Berücksichtigung höherer Glieder wird ebenfalls bei Korteweg stark betont und, was wichtiger ist, diese Glieder werden wirklich berücksichtigt und die Entscheidung über Stabilität

oder Nichtstabilität nicht allein auf Grund der Glieder erster Ordnung gefällt. Auch der Begriff der praktischen Labilität (bei theoretischer Stabilität) ist bei Korteweg angedeutet, vgl. § 24 der Arbeit.

Zu pag. 350. Wir möchten nicht den Anschein erwecken, als ob die Entscheidung, ob stabil oder labil, stets eindeutig und naturgemäſs ausfiele, wenn man unsere Definition akzeptiert. Herr Korteweg hat uns auf ein Beispiel aufmerksam gemacht, bei dem man nach dem geometrischen Anblick der gestörten Bahnkurven von Instabilität oder mindestens Indifferenz sprechen würde, wo aber die analytische Prüfung mittels unserer Definition Stabilität ergibt. Es handelt sich um den Fall der Centralbewegung eines einzelnen Massenpunktes (s. pag. 347) für $n = -3$. Die Anziehungskraft sei dementsprechend $-f/r^3$. Die Bewegung des Massenpunktes wird durch die folgenden beiden Gleichungen bestimmt, in denen r und φ Polarkoordinaten mit dem Pole im Anziehungscentrum sind:

$$r^2\varphi' = c, \tag{1}$$

$$r^2\varphi'^2 + r'^2 - \frac{f}{r^2} = 2h; \tag{2}$$

c ist die Konstante des Flächensatzes, h die der lebendigen Kraft, während die Masse des Punktes gleich 1 genommen ist. Aus (1) und (2) ergibt sich

$$r'^2 = 2h + \frac{c^2 - f}{r^2}. \tag{3}$$

Als spezieller Fall kommt die Kreisbewegung ($r' = 0$) vor. Sei a der Radius des Kreises, so ist die Centrifugalkraft $a\varphi'^2 = c^2/a^3$. Diese muſs durch die Anziehungskraft $-f/a^3$ aufgehoben werden. Es muſs also $f = c^2$ und folglich nach (3) $h = 0$ sein. Wir betrachten nun z. B. eine gestörte Bewegung, für welche h ebenfalls Null (konservative Störung), aber $f \neq c^2$, also etwa $f - c^2 = \varepsilon^2$ ist. Gl. (3) ergibt dann

$$rr' = \varepsilon. \tag{4}$$

Durch Vergleichung mit (1) schlieſst man

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{c} \quad \text{oder} \quad r = Ce^{\frac{\varepsilon}{c}\varphi}, \tag{5}$$

wo die Integrationskonstante C gleich a genommen werden kann. Die Bahnen sind also logarithmische Spiralen, welche vom 0 Punkt ausgehend den ursprünglichen Kreis a schneiden und sich ins Unendliche verlieren. Der Kreis $r = a$ ist bei diesen Bahnen durchaus nicht ausgezeichnet. Dies gilt für jeden noch so kleinen Wert von ε, nur daſs bei abnehmendem ε die Windungen der Spiralen immer enger werden.

Für $\varepsilon = 0$ aber folgt $r = C$, also eine Kreisbahn, und zwar die ursprüngliche, da wir natürlich auch die Störung der Lage des Punktes zu Null abnehmen lassen.

Der Limes der gestörten Bahn ergibt sich so auf analytischem Wege als identisch mit der ursprünglichen (das Gleiche würde auch für einen beliebigen nicht-konservativen Anstoſs gelten). Geometrisch wird man allerdings kaum den einzelnen Kreis als Limes der sich successive verengernden logarithmischen Spiralen gelten lassen; nur da diese in der Grenze im Ganzen nicht mehr eine einzelne analytische Kurve darstellen, wird man bei dem analytischen Grenzprozeſs auf den Kreis geführt. Trotzdem müſsten wir, wenn wir den Wortlaut unserer Definition analytisch auffassen, die Kreisbahn $r = a$ als stabil bezeichnen.

Anders liegt die Sache im Falle $n < -3$; hier treten asymptotische Bahnen auf (Spiralen, deren Windungen vom Nullpunkt und vom Unendlichen ausgehend am Kreis $r = a$ sich unbegrenzt von beiden Seiten her häufen; im Fall $n = 3$ waren die entsprechenden Spiralbahnen nicht als asymptotische zu bezeichnen, da sie in der Grenze nicht mehr analytische Kurven waren und nicht einen festen Kreis als Limes hatten). Der Grenzübergang kann für $n < -3$ so eingerichtet werden, daſs der Limes der gestörten Bahn auch in analytischer Fassung nicht die ursprüngliche Bahn, sondern eine solche asymptotische Bahn wird.

Im Gebiet der Gleichgewichtsaufgaben ist der Begriff des „indifferenten Gleichgewichts“ allgemein geläufig, während er im Gebiet der Bewegungsaufgaben bisher nicht üblich ist. Man wird den obigen Fall der Centralbewegung für $n = -3$ und ähnliche in durchaus entsprechender Weise auch als „indifferente Bewegungszustände“ bezeichnen können. In der That stimmt er in mehrfacher Hinsicht mit dem Fall des kräftefreien ruhenden Punktes überein, wenn man die Bewegung auf ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit φ' rotierendes Koordinatensystem bezieht.

Wenn wir unsere Ausführungen in den §§ 6 bis 8 zusammen mit dem obigen Beispiel überblicken, so kommen wir zu dem Ergebnis, daſs die Mannigfaltigkeit der möglichen Bahnen und Bewegungszustände viel zu groſs ist, um in bestimmte Kategorien, wie stabil, labil oder auch indifferent, ohne Zwang eingeordnet werden zu können. Jede solche Definition wird in gewissen Fällen der natürlichen Auffassung widersprechen. Davon wollen wir auch unser Stabilitätskriterium in § 6 nicht ausnehmen.

Zu pag. 353. Der Ausdruck „praktisch instabil“ ist zuerst von W. Gibbs, 1876, gebraucht. Vgl. die deutsche Ausgabe einiger im Original gesondert erschienener Abhandlungen: Thermodynamische Studien, Leipzig 1892, pag. 94.

Zu pag. 376. Bei der Besprechung der besonderen Fälle der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels, die der vollständigen analytischen Behandlung zugänglich sind, ist in unserer Darstellung der Fall der Frau Kowalevski etwas zu kurz gekommen (wie Herr F. Kötter in seiner Schrift hervorhebt: Bemerkungen zu F. Klein's und A. Sommerfeld's Buch über die Theorie des Kreisels, Berlin 1899, Mayer & Müller). Dies lag nicht nur daran, daſs wir zu diesem Falle keine eigenen Entwicklungen zu geben hatten, sondern auch daran, daſs sich hier, wie es scheint, nicht durch einfache geometrische Betrachtungen, wie in den anderen behandelten Fällen, die Durchführbarkeit der Integration auf Grund der Impulssätze einsehen läſst. Die vollständige Behandlung des Falles aber würde zu lange analytische Ausführungen erfordert haben.

Von der in der Anmerkung zitierten Arbeit von F. Kötter sei noch insbesondere hervorgehoben, daſs der Verfasser, nach Richtigstellung der Kowalevski'schen Formeln, die Zusammensetzung der Bewegung des Kreisels im Kowalevski'schen Fall aus zwei einfachen Drehungen erkannt hat: Drehung eines neuen Axensystems mit konstanter Vertikalkomponente der Drehgeschwindigkeit und Drehung um eine Axe des eingeführten Systems.

Zu pag. 377 f. Auch in neuerer Zeit sind eine groſse Reihe von Arbeiten über das Integrationsproblem des schweren unsymmetrischen Kreisels, wie auch über die Bewegung des unsymmetrischen Kreisels bei verallgemeinertem Kraftgesetz publiziert worden, in denen integrable Sonderfälle behandelt werden. Bezüglich aller dieser Arbeiten verweisen wir auf den erst später erscheinenden zusammenfassenden Bericht von Stäckel: Rotation starrer Körper und Verwandtes, Encyklopädie der math. Wiss. IV, 13.

Mehr an die Art der Fragestellung, die im § 9 des Kap. V voranstand, schien eine Untersuchung von Schiff (Moskau, math. Sammlung, Bd. 24, 1903) anzuschlieſsen, die nach allen den Bewegungen fragt, bei denen der Impulsvektor konstante Länge behält. Indessen hat sich dessen Meinung, daſs solche Bewegungen von groſser Allgemeinheit existieren, als irrig erwiesen; wie Stäckel gezeigt hat (Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels, Math. Annalen 67, pag. 399, 1909), führt die genannte Fragestellung nur zu den Staude'schen permanenten Drehungen, bei denen nicht nur die Länge des Impulsvektors, sondern auch seine Lage relativ zum Körper erhalten bleibt. Es bleiben also diese permanenten Drehungen die einzigen bekannten Bewegungen des allgemeinen schweren, unsymmetrischen Kreisels.

Andererseits ist aber die Frage nach den Fällen von spezieller Massenverteilung, die ein drittes algebraisches Integral zulassen, neben den beiden, die die Konstanz der Energie und die Konstanz der Impulskomponente für die Vertikale ausdrücken, weiter gefördert worden. Während die Untersuchungen von R. Liouville (vgl. pag. 377) noch nicht vollständig waren, hat E. Husson (Annales de Toulouse 2e série, VIII, 1906: Recherches des intégrales algébriques ... und Acta math. XXXI, 1908: Sur un théorem de M. Poincaré ...) bewiesen, dafs aufser den bereits bekannten Fällen kein weiterer mehr existiert, in dem ein drittes Integral möglich ist. Es bleiben also in der That der Euler'sche Fall (Schwerpunkt im Aufhängepunkt), der Lagrange'sche Fall (symmetrischer Kreisel) und der von Frau Kowalevski die einzigen, die der vollständigen Behandlung bisher zugänglich sind. Während der Beweis von Husson transcendente Methoden benutzt, ähnlich denen, die von Poincaré zur Himmelsmechanik entwickelt sind, hat neuerdings P. Burgatti einen elementaren Beweis des Theorems gegeben, unter blofser Verwendung algebraischer Mittel (Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici ..., Rend. del circolo matem. di Palermo, t. XXIX, 1910). Die beiden Beweise übrigens stützen sich auf einen schon von Poincaré aufgestellten Satz (Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste, t. I), dafs, ausgenommen im Fall des kräftefreien Kreisels, die Gleichheit zweier Hauptträgheitsmomente Vorbedingung für die Existenz des dritten algebraischen Integrals ist.

Da also keine Aussicht ist, durch die Integration weiterer Sonderfälle tiefer in das unbekannte Gebiet der Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels vorzudringen, wird um so mehr der Versuch qualitativer Diskussionen am Platze sein, der pag. 391 empfohlen war. Die in dieser Richtung bisher vorliegenden Ansätze beschränken sich auf die Behandlung kleiner Schwingungen, die sich, durch Störungen erregt, bekannten Bewegungen überlagern. Die kleinen Schwingungen eines unsymmetrischen Körpers um seine Gleichgewichtslage (bei vertikal nach unten gerichteter Schwerpunktsaxe), die sich bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung natürlich ohne sonderliche Schwierigkeit behandeln lassen, untersucht M. Lecornu (Sur les petits mouvements d'un corps pesant, Bull. de la Soc. math. de France, 30, 1902). Wir erwähnen die Untersuchung, da der Verfasser (unabhängig von der Staude'schen Arbeit) ebenfalls zur Aufstellung der Bedingung für die permanenten aufrechten Drehungen gelangt, und zwar in folgender abweichenden Fassung: Permanente Rotationsaxen können die durch den Stützpunkt gezogenen Axen sein, die die Eigenschaft haben, für irgend einen ihrer Punkte Hauptaxe zu sein. Die

Identität dieser Bedingung mit der Staude'schen läſst sich leicht nachweisen.

Bewegungen eines nahezu symmetrischen Kreisels behandelt M. Winkelmann (Zur Theorie des Maxwell'schen Kreisels, Diss. Göttingen 1904) durch Aufstellung der „Störungen erster Ordnung" (in der Ausdrucksweise der Astronomie), wobei die Bewegung des symmetrischen Kreisels als ungestörte zu Grunde gelegt wird, allerdings ohne bis zur Fehlerabschätzung oder Untersuchung der Gültigkeitsdauer der aufgestellten Gleichungen vorzudringen. Wir wollen endlich noch auf die in Richtung der numerischen Durchführung weitergehende Behandlung der Kreiselprobleme in der astronomischen Litteratur hinweisen, in der sich auch einzelne Ansätze zur näherungsweisen Behandlung des schweren unsymmetrischen Kreisels finden (z. B. Charlier, Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems, Arkiv för Matematik, Kopenhagen, IV, 1908).

Zu pag. 379. In der Fragestellung, die wir beim Heſs'schen Fall voranstellten, nämlich unter welchen Bedingungen es möglich ist, daſs der Impulsvektor dauernd senkrecht zum Schwerpunktsvektor steht, sind, wie Herr Stäckel bemerkt (Math. Annalen 67, pag. 423), die einfachen Pendelungen von Körpern mit passend gewählter Massenverteilung enthalten, die Mlodzjejewskij (vgl. Fuſsnote pag. 378) erwähnt hat. Unter Pendelung ist hier der Fall zu verstehen, in dem der Körper gerade wie ein physikalisches Pendel um eine horizontale Axe schwingt, während aber nur ein Punkt dieser Axe unterstützt ist. Aus Symmetriegründen ist ersichtlich, daſs diese Bewegung immer dann eintritt, wenn der Schwerpunkt in einer Hauptebene des Körpers liegt und dem Körper zu Anfang eine Drehung nur um die dazu senkrechte, horizontal zu legende Hauptaxe erteilt wird. Die Bewegung fordert also eine Bedingung für die Massenverteilung (Schwerpunkt in einer Hauptebene), drei für die Konstanten der Bewegung. Der Impulsvektor fällt hier dauernd in die auf dem Schwerpunktsvektor senkrechte Hauptaxe, hat aber veränderliche Länge, während er bei den Staude'schen permanenten Drehungen auch in eine feste Axe des Körpers fällt und konstante Länge behält. Bei der Ableitung der Heſs'schen Bedingungen war dieser Fall ausgeschlossen, da dort angenommen wurde, daſs der Impulsvektor während der Bewegung einen beliebigen Strahl der (im Körper festen) Normalebene zum Schwerpunktsvektor wirklich bestreicht, während er hier in einer ausgezeichneten Geraden dieser Ebene dauernd verharrt.

Zu Kap. VI.

Zu pag. 429. Die mathematische Seite der Theorie des symmetrischen Kreisels, vom Standpunkt der Theorie der elliptischen Funktionen aus, hat Greenhill weiter verfolgt, durch Untersuchung insbesondere solcher Fälle, in denen die durch ϑ-Quotienten dargestellten Kreiselkurven (Bahnkurven der Kreiselspitze, bzw. Herpolhodie oder Impulskurven) algebraische Kurven werden (z. B. Annals of mathematics, 5, 1904).

Zu pag. 472. Herr F. Kötter bemerkt in der pag. 950 zitierten Schrift, dafs die Formeln (40), die die neun Richtungskosinus bei der Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels durch ϑ-Quotienten darstellen, Versehen enthalten. Es mufs in der zweiten Gleichung des Systems vor den Bruch der Faktor $-i$ statt i treten, aufserdem sind die für c und c' angegebenen Formeln zu vertauschen, also zu setzen:

$$c = i\frac{\vartheta(\omega + is)\,\vartheta(t)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')}\,e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)},$$

$$c' = \frac{\vartheta(is)\,\vartheta(t - \omega)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')}\,e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)}.$$

Um das so korrigierte System gegen die Jacobi'schen Formeln (vgl. Anm. auf pag. 473) zu orientieren, stellen wir folgende Tabelle zusammen:

Bezeichnung von Jacobi:	Unsere Bezeichnung:
$\mathsf{H}(t)$	$\vartheta(t)$
$K,\ K'$	$\omega,\ \omega'$
a	$\omega' - s$
$\alpha + i\alpha'$	$(a' + ib')e^{-i\left(2l + \frac{\pi}{2\omega}\right)t}$
$\beta + i\beta'$	$(a + ib)e^{-i\left(2l + \frac{\pi}{2\omega}\right)t}$
$\gamma + i\gamma'$	$(a'' + ib'')e^{-i\left(2l + \frac{\pi}{2\omega}\right)t}$
$\alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$	$c',\ c,\ c''.$

Eine formal einfachere Gestalt haben die Jacobi'schen Formeln noch durch die Benutzung der Funktionszeichen Θ, H_1 und Θ_1, die mit H in den bekannten Beziehungen stehen:

$$\Theta(t) = -ie^{\frac{i\pi}{4\omega}(2t + i\omega')}\,\mathsf{H}(t + i\omega'),$$

$$\mathsf{H}_1(t) = \mathsf{H}(t + \omega), \qquad \Theta_1(t) = \Theta(t + \omega).$$

Zu pag. 486. Der hier beginnende zweite Beweis des Jacobi'schen Theorems ist schon früher von F. Caspary gegeben worden. Vgl. Darboux Bulletin (2) 13, 1889: Sur les expressions des angles d'Euler, de leurs fonctions trigonométriques et des neuf coefficients d'une substitution orthogonale au moyen des fonctions thêta. (Siehe auch unten zu pag. 511.)

Zu pag. 490. Zu der hier vertretenen Ansicht von dem kinematischen Charakter des Jacobi'schen Theorems vgl. die gegensätzliche Auffassung von Herrn F. Kötter in der mehrfach zitierten Schrift.

Zu pag. 505. Es ist zu beachten, dafs c_1 hier in anderer Bedeutung gebraucht ist als auf pag. 503 und 506 unten und den folgenden Seiten.

Zu pag. 511. Da die Weierstrafs'schen Vorlesungen (1879) nicht veröffentlicht wurden, tritt in der Litteratur die Anwendung der Parameter α, β, γ, δ auf die analytische Behandlung des Kreiselproblems wohl zuerst bei F. Caspary auf, sowohl für den Fall des kräftefreien, wie für den des schweren Kugelkreisels. Caspary wird auf analytischem Wege dazu geführt, gewisse Theta-Quotienten zu betrachten, die unseren α, β, γ, δ entsprechen und sie bilinear so zusammensetzen, dafs die entstehenden Ausdrücke die Euler'schen Gleichungen für die Richtungskosinus und Rotationskomponenten und die Orthogonalitätsbedingungen der ersteren identisch befriedigen. Aufser der zu pag. 486 zitierten Arbeit sind noch zu nennen: Comptes Rendus, 107 (1888), pag. 859, 901, 937; 112 (1891), pag. 1120; vgl. auch E. Jahnke, ibid. 126 (1898), pag. 1126. Wegen der Beziehung der Parameter α, β, γ, δ zu der auf der Kugelfläche ausgebreiteten komplexen Variabeln, die bereits Gaufs bekannt war (vgl. pag. 512), von Riemann neu gefunden wurde (vgl. pag. 30), von Schwarz 1872 in der Theorie der hypergeometrischen Funktionen (Crelles Journal 75) und von Klein von 1872 an zuerst bei den Ikosaëder-Substitutionen verwendet wurde (vgl. pag. 30), sind die erforderlichen Nachweise an den angegebenen Stellen im Texte selbst nachzulesen. Von hier aus gelangte Klein dazu, die Parameter auch auf die Kreiseltheorie anzuwenden (vgl. Göttinger Nachrichten 1896, pag. 3 und die auf pag. 518 zitierten Princeton Lectures, wo sie auch für die Theorie des auf der Horizontalebene spielenden Kreisels Anwendung finden und unter Heranziehung der Theorie der automorphen Funktionen, worauf wir in unserer Darstellung nicht eingehen konnten, zu einfachen Resultaten führen).

Zu Kap. VII.

Zu pag. 537. Wegen der Geschichte der Reibungsgesetze vgl. weitere Angaben, insbesondere über die ältere Litteratur bei P. Stäckel, Encykl. d. math. Wiss. IV, 6, Nr. 6.

Zu Kap. VIII.

Zu § 9. Die Foucault'sche Idee des Nachweises und der Messung der Erdrotation durch Kreiselversuche, die in dem Anschütz'schen Kreiselkompafs ihre vollendetste Ausführung gefunden hat, hat auch schon Föppl bis zur quantitativen Messung verfolgt (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. München, Bd. XXXIV, 1904, pag. 5 u. Phys. Ztschr. 5, 1904), während die ursprünglichen Foucault'schen Versuche und die späteren von Gilbert von diesem Ziel noch weit entfernt blieben und die ersteren wohl noch nicht einmal qualitativ gesicherte Resultate ergaben. Die Anordnung des Föppl'schen Versuches war der Anschütz'schen nahe verwandt, nur wurde hier durch Aufhängung an drei Drähten die horizontale Gleichgewichtslage des rotationslosen Kreisels erreicht, die bei Anschütz durch ein Übergewicht erzielt wird. Der Kreisel wird wie der Kompafskreisel eine Richtkraft nach Norden $N\omega \cos\varphi \sin\psi$ (vgl. pag. 857) erfahren, die ihn von seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage abdrängt, während er durch das trifilare Moment und die Torsionselastizität der Aufhängedrähte in diese zurückstrebt. Am günstigsten wird hier die ursprüngliche Ost-Westlage der Kreiselaxe sein ($\psi = 90^0$), er stellt sich dann in eine von $\psi = 90^0$ mefsbar verschiedene Lage ein, in der gerade die Richtkraft dem von der Hängung herrührenden Moment um die Vertikale das Gleichgewicht hält, so dafs bei bekanntem Impuls und ermitteltem Moment die Rotationsgeschwindigkeit ω der Erde bestimmt werden kann. Wie beim Anschütz'schen Kreisel ist es wesentlich, dafs drei Freiheitsgrade, hier wegen der Nachgiebigkeit der Aufhängedrähte, vorhanden sind, und dafs auch hier die dadurch bedingte „effektive Trägheit" (vgl. pag. 857) die Schwingungsdauer verlängert; andererseits ist natürlich auch der elektromagnetische Antrieb von größter Bedeutung, der erst die genügend lange Beobachtungszeit ermöglicht. Die Versuche wurden so angeordnet, dafs sich Ausschläge von etwa 5^0 bis 8^0 ergaben, bei einer Schwingungsdauer von 6 Min. bis 8 Min.

Berichtigungen.

pag. 13, Anm.: Statt „*t.* 18" lies „*t.* 16".

pag. 14, Anm.: Statt „1855" lies „1857".

pag. 18: Fig. 3 ist leider perspektivisch mißraten.

pag. 50, Anm. **): Die hier citierte Arbeit Poinsot's ist auch erschienen in Liouvilles Journal ser. 1, t. 18 (1853), p. 41.

pag. 101, Z. 1 v. u.: Statt „die Länge" lies „das Quadrat der Länge".

pag. 113, Anm. **): Statt „1854" lies „1856, erschienen 1858".

pag. 139, Z. 7 v. u.: Statt „gegen das feste und gegen das bewegliche" lies „gegen das bewegliche und gegen das feste".

pag. 142, Z. 16 v. u.: Statt „1854" lies „1856".

pag. 359, Z. 11 v. u.: Nach „sämtlichen" schalte ein „nicht eliminierten".

pag. 378, Mitte: Im Staude'schen Fall ist der Grad der Partikularisation um 1 höher als in den anderen hier behandelten Fällen; es sind nämlich die 4 Forderungen zu stellen, daß zu Beginn der Bewegung eine Erzeugende des Staude'schen Kegels vertikal stehen soll, und daß der Rotationsvektor in die Vertikale fällt und eine festbestimmte Länge hat.

pag. 418, Z. 14 v. u.: Statt „$\mathsf{H}\left(\frac{t\pi}{2\omega}\right)$" lies „$\mathsf{H}(t)$".

pag. 429, Anm. *): Vor Jacobi hat schon Rueb in der pag. 473 citierten Arbeit den schweren symmetrischen Kreisel mit elliptischen Funktionen behandelt.

pag. 445, Z. 11 v. u.: Statt „$|t| < \frac{2\omega}{100}$" lies „$|t| \geqq \frac{2\omega}{100}$".

pag. 483, Z. 8 v. o.: Statt „des Impulses" lies „der Rotation".

pag. 489, Anm. *): Der Jacobi'sche Satz wurde schon von Jacobi selbst ohne Beweis in den Monatsberichten der Berliner Akademie, 1850, veröffentlicht.

pag. 517, Anm. *): Statt „434" lies „418, erste Ausgabe".

pag. 615, Z. 9 v. o.: Statt „$\frac{a \sin}{b \cos}\left\{\frac{N}{A}t\right\}$" lies „$\frac{a \sin}{b \cos}\left\{\frac{N}{A}\, t\right\}$".

pag. 629, Z. 12 v. u.: Statt „$v < V$" lies „$v > V$".

pag. 728, Z. 17 v. u.: Statt „$(C - A)\omega q$" lies „$(C - A)\omega p$".

NAMENREGISTER.

(Die Ziffern bezeichnen die Seitenzahlen. Heft I: 1—196, II: 197—512, III: 513—759, IV: 760—955.)

Abel 392.
Abraham 926, 938.
Airy 309.
Albrecht 675.
D'Alembert 167, 633, 922.
Anschütz-Kämpfe 846, 848 f.
Appell 5, 347.
Argand 393.
Arrhenius 686.

Ball 9, 88, 103.
Barus 623.
Baule 919.
Beauchamp Tower 794.
Behr 900.
Beltrami 511.
Berger 841, 844.
Bessemer 794.
Boltzmann 73.
van den Bos 846.
Bour 736.
Bourlet 867, 877.
Bradley 648, 660.
Brecht 781.
Brennan 908.
Budde 5, 83, 736.
Burgatti 951.
Burkhardt 393, 679.

Callandreau 702.
Carpentier 922.
Carvallo 864 f., 877 f.
Caspary 953, 954.
Cauchy 397.
Cayley 64, 939, 943.
Chandler 673, 678, 682, 684, 729.
Charlier 952.
Christie 684.
Clairaut 691.
Clifford 943.
Coriolis 183, 184, 897.
Coulomb 537, 543.
Crabtree 937.
Cranz 922 f., 934.

Darboux 234, 489.
Darwin 686, 702, 724.
Despeyrous-Darboux 5.
Dewar 199.
Diegel 794.
Dirichlet 354, 372.
Dubois 846.
Duhamel 5.

Einstein 942.
Euler 138 f., 142 f., 633, 668, 922.
Ewing 539.

Finsterwalder 409
Fleuriais 919.
Föppl 808, 826, 837 f., 885, 892, 903, 904, 937, 945, 954.
Foucault 134, 309, 731 f., 845.
Franke 309.

Galilei 534, 762.
Galton 540.
Gauſs 29, 265, 393, 512, 634.
Gilbert 309, 736, 746, 751, 752, 847.
Graſsmann 61.
Greenhill 199, 938, 945, 952.
Guyou 737.

Hadamard 356.
Halphen 260, 489, 490.
Hamilton 142, 939.
Hayward 113, 142.
Heinen 315.
Helmert 702, 708, 711, 724.
Hermite 151, 415, 422, 432, 500, 508.
Herrmann 538.
Herschel, J., 937.
Hertz 69, 511, 867.
Heſs 125, 378, 429.
Hoffmann-Natani 512.
Hopkins 687.
Hough 688, 703.
Husson 950, 951.

Jacobi 151, 265, 342, 372, 392, 417, 421, 425, 473, 476, 490.
Jahnke 715, 954.
Jellet 631.
Jenkin 539.
De Jonquières 313, 919.
Jouffret 190.
Joukowski 378, 380, 386.

Kamerlingh-Onnes 733.
Kant 725.
Kelvin, s. Thomson.
Kirchhoff 5, 534.
Klein 30, 103, 322, 938, 943, 954.
Klein-Fricke 265.
Koppe 310, 315, 945, 946.
Korteweg 947, 948.
Kötter, F., 376, 774, 949, 950, 953.
Kowalevski, S., 376, 949, 950.
Küstner 673.

Lagrange 4, 88, 224, 354, 372, 534, 633.
Lamb 693.
Lamp 708.
v. Lang 313.
Lange 900.

Laplace 342, 534, 633.
de Laval 884f.
Lecornu 951.
Legendre 225, 392.
Levi-Civita 377.
Liapounoff 356, 374.
Lie 161.
Liebmann 161, 377, 495.
Liouville, J., 421.
Liouville, R., 377, 950.
Lipschitz 511.
Lorentz, H. A., 809, 942.
Lorenz, H., 808.
Lottner 429, 489, 736.
Love 585, 692, 696.

Macfarlane Gray 794.
Mach, E. u. L., 924, 929.
Magnus 922.
Malmström 808.
Masi 537, 546.
Maxwell 14, 673.
Mehmke 938.
Minkowski 938, 942.
Mlodzjejewskij 378, 952.
Moebius 88, 298.
Morin 540.
Müller-Pouillet 315.
Munter 315.

Nekrassoff 378, 386.
Newcomb 663, 688.
Newton 74, 534, 632, 635, 762, 925.
Nyrén 673.

Obry 784.
Oppolzer 662.

Padova 490.
Perry 134, 307, 537, 937.
Peters 673.
Petroff 546.
Plücker 88.
Poggendorff 313.
Poincaré 197, 336, 374, 376, 702, 942, 951.
Poinsot 5, 13, 50, 82, 88, 99, 101, 104, 112, 121, 122, 129, 142, 145, 198, 312, 337, 455, 669, 671.
Poisson 306, 517, 633, 922.
Prandtl 884, 921, 925, 928, 938.

Quet 736.

Radau 702, 724.
Rankine 864.
Rayleigh 801.
Reed 794.
Regnard 922.
Resal 115.
Reynolds 543, 546.
Riemann 28, 30, 394, 398, 421.
Ritter, A., 189.
Rodrigues 60.
Routh 5, 88, 247, 343, 356, 367, 374, 378, 489, 729.
Rozé 1, 583.
Rueb 473.

de Saint-Germain 115, 490.
Saint-Guilhem 945.
van de Sande Bakhuyzen 682, 684, 729.
Scheffler 190.
Schellbach 104, 265.
Scherl 908.
Schiff 950.
Schlick 794f., 808f., 833f., 916.
Schmidt, A., 312.
Schoenfließ 938.
Schuster, A., 679, 684.
Schwarz 260, 954.
Sears 784.
Serson 919.
Siacci 927.
Siemens 846.
Sire 309, 734.
Skutsch 844.
Smith, A., 631.
Sommerfeld 378, 926.
Spitaler 707, 722.
Stäckel 938, 950, 954.
Staude 378, 386, 950.
Stodola 885, 889, 898, 917.
Stone 592.
Stribeck 546.
Stübler 945.
Study 943.
Sylvester 122.

Tait 142, 509.
Thomson, W., 192, 195, 622, 686, 696, 846.
Thomson u. Tait 5, 7, 81, 195, 343, 347, 348, 686, 687, 696, 698, 771, 801, 846, 904, 906.
Tisserand 633, 662, 702.

Voigt 5.
Volterra 715.

Walker 863.
Wangerin 715.
Webster 937.
Weierstraß 225, 418, 511, 519.
Whipple 865f., 877f.
Wiechert 686, 687, 702.
Wien, W., 692.
Winkelmann, M., 951.
Wittfeld 781.
Worthington 773.
Wright 921.

Zeeman 809.

SACHREGISTER.

(Die Ziffern bezeichnen die Seitenzahlen.)

Abbildung, konforme 408.
—, orthographische 198, 207.
—, stereographische 199, 207.
Absolutes Maſssystem 70.
Accelerationswiderstand 171, s. auch Trägheitswiderstand.
Aeronautik, Rolle der Kreiselwirkungen 921.
D'Alembert'sches Prinzip 167.
Anschütz'scher Kreiselkompaſs, s. Kreiselkompaſs.
Äquinoktialpunkte 634.
Astronomische Nutation 649f., s. Nutation.
Astronomische Präcession, kinematisch 50, kinetisch 640f., s. Präcession.
Asymptotische Lösungen 336.
Aufrechte Rotation, s. permanente Rotation.
Aufrichten der Figurenaxe 553f, siehe Reibung.
Äuſseres Produkt 61, s. Vektorprodukt.

Bahnkurven der Figurenaxe beim schweren symmetrischen Kreisel, qualitativ 200f., 253, ihre Grenzkreise 239f., 248; Darstellung durch elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades 431; Näherungsformeln 451; Bedingung für Spitzen 242, 257, für Schleifen 258.
— eines beliebigen Punktes beim schweren symmetrischen Kreisel 433.
— der Hauptaxen bei Poinsotbewegung 469.
Balkenbiegung, Grundgleichung 894.
Ballistik, das allgemeine Problem 923, Luftwiderstand, Zerlegung in Reibungs-, Wirbel- und Wellenwiderstand 925, beobachtete Widerstandsfunktion 927, Sinn des Luftwiderstandsmoments 930; Analogie aus der Elektronentheorie 926; Stabilierung der Geschoſsaxe 931, konische Pendelung 932, Seitenablenkung rotierender Langgeschosse, Beobachtung 933, Theorie 934.
Barogyroskop von Gilbert 753f.
Bedingungsgleichungen 168.
Beer'sches Gesetz 189.
Beschleunigungsdruck 612; Einfluſs auf Kreiselkompaſs 858.
Bessemerkreisel 794, s. Schiffskreisel.
Bewegliche Koordinatenaxen 139.
Bewegungsschraube 9, 47.
Bohnenberger'sches Maschinchen 2.
Buys-Ballot'sches Gesetz 190.

Chandler'sche Periode s. Polschwankungen.
Centrifugalmomente 98; Erklärung der Bezeichnung 146.
Clairaut'sche Formel für Elliptizität des Mac Laurin'schen Ellipsoids 691.
Coriolis'sche Kraft 181, 187; als Bestandteil des Deviationswiderstandes 188.
Coulomb'sche Reibungsgesetze 537f.

Deviationswiderstand, als Normalkomponente des Trägheitswiderstandes 171, als Moment von Corioliskräften 188, seine Richtung 173, ellipsoidischer und sphärischer Bestandteil 175; D. = Kreiselwirkung 770; experimenteller Nachweis 194; s. auch Kreiselwirkung.
Dirichlet'sches Stabilitätskriterium 355.
Dissipationsfunktion 801.
Drehstreckung 56; Zusammensetzung von Drehstreckungen 57, durch Multiplikation von Quaternionen 60; s. auch Quaternionen.
Drehung, s. Rotation.

Eigenimpuls 762.
Einrad, seine Stabilität 864.

Einschienenwagen, System Brennan und Scherl 903f., Schema der Kreiselanordnung 903, andere mögliche Formen 911, Stabilitätsbedingung 905, 906, Beschleunigung eines Freiheitsgrades erforderlich 908, Stabilierung an Kurven 912, Einfluſs von Stöſsen 913.
—, Monorailbahn 902; Schwebebahn 900.
Eisenbahnen, Rolle der Kreiselwirkungen des Radsatzes 771f.; Wirkung einer Kurve 772, der Überhöhung 776, von Unebenheiten 779, Beobachtung von Kreiselwirkungen 781.
Elastische Welle, s. Lavalwelle.
Elastizität der Erde, Einfluſs auf Polschwankungen, Chandler'sche Periode 688f., Bestimmung des Elastizitätsmoduls, Deformation der Erdoberfläche durch Polschwankungen 704; s. auch Gleichgewichtsfiguren.
— des Kreisels 598, instantane Figurenaxe 605, Präcessionsdauer des elastischen Kreisels 607.
— der Unterlage, gekoppelte Schwingungen 609, Einfluſs auf die pseudoreguläre Präcession 613f.
Elliptische Integrale und Funktionen, Integral erster Gattung 260, 261, 398, (vollständiges) Integral zweiter Gattung 580, Integral dritter Gattung 401, Legendre'scher Modul 262; Berechnung ell. Integrale, Legendre'sche Tafeln 259f., 264, 265, näherungsweise Umkehr im Reellen 269; Umkehrung der Integrale erster Gattung 392f., komplexe Definition der Perioden 398, Abbildung der Riemann'schen Fläche $(u, \sqrt{U})$ 406f., doppelte Periodizität der ell. F. 413, ϑ-Funktion, ell. F. als ϑ-Quotienten 418f., Transformationstheorie der ell. F. 470, Uniformisierung durch ell. F. 414, ell. F. zweiter Art 422, Integration Lamé'scher Gleichungen durch diese 501f.
— Funktionen, Anwendungen; 1. Integrale beim schweren symmetrischen Kreisel 223, 231; Umkehr durch ell. F. zweiten Grades 424, Parameter α, β, γ, δ als ell. F. zweiter Art ersten Grades 415, transscendente Konstanten 428, Bahn der Kreiselspitze 431, eines beliebigen Punktes 433, s. auch Parameter; 2. kräftefreier unsymmetrischer Kreisel: Integration der Euler'schen Gleichungen 455f., Parameter α, β, γ, δ durch ell. F. zweiter Art dargestellt 468, Bahnkurven der Hauptaxen 469, Darstellung der neun Richtungskosinus (Jacobi'sche Formeln) 472, Herpolhodie 474; transscendente Konstanten 458, 462, 466, s. auch Poinsotbewegung und Parameter; 3. konjugierte Poinsotbewegung, s. diese.
Elliptizität, Zusammenhang mit der numerischen Excentrizität 600; der Erde, ihre Bestimmung aus Präcession und Nutation 663; Superposition kleiner -en 601, 602; s. auch Gleichgewichtsfiguren.
Energiekriterium der Stabilität des Gleichgewichts 355, bei Bewegungen 358.
Energieprinzip, Ableitung aus den Impulssätzen der Punktmechanik 120, aus dem Impulssatz beim Kreisel 219.
Erdinneres, geophysikalische Theorien 685f., 703.
Erdrotation, Beer'sches Gesetz 189, Buys-Ballot'sches Gesetz 190; s. auch Polschwankungen, Foucault'sche Versuche.
Erdsphäroid, sein Anziehungspotential nur von den Trägheitsmomenten abhängig 637.
Erzwungene Schwingungen, bei elastischer Unterlage 610, Nutation, s. diese, jährliche Polschwankungen 707, beim Schiffskreisel 805, 810f., der Lavalwelle 889, 897.
Euler'sche Gleichungen 138f., 147, als Ausdruck der Impulsgesetze 140f., 160, Poinsot's Ableitung 144; Integration im kräftefreien Fall 149, Beziehung zur Theorie der Transformationsgruppen 161.
— kinematische Gleichungen, in φ, ψ, ϑ geschrieben 45, in α, β, γ, δ geschrieben 43, Vorzüge der letzteren 151.
— Periode der Polschwankungen 668.
— symmetrische Drehungsparameter 60.
— unsymmetrische Winkel 17.

Fahrrad 863f.; Einrad 864, Hochrad 864; Zweirad, seine Kinematik 867, 869, Lage der Lenkstange 867, 872, 877; Centrifugalkräfte und Kreiselwirkungen 872, 873, kleine Schwingungen bei aufrechter Fahrt 876; Stabilitäts-

gebiet 865, 879, 880, Anteil der Kreiselwirkungen 880; F. als nicht holonomes System 867.
Figurenaxe 1.
Flächensatz 112, s. auch Impulssätze.
Flüssigkeitswiderstand 535.
Flutreibung, ihre dämpfende Wirkung auf Polschwankungen 725 f., Abdämpfung der durch Polschwankungen erzeugten Fluten 727.
Foucault'sches Gyroskop 2, 731.
Foucaultsche Kreiselversuche zum Nachweis der Erdrotation 731 f.; 1. Anordnung mit 3 Freiheitsgraden: Theorie und Kritik 737 f.; Einflufs des Gehänges und der Reibung 741 f.; 2. Anordnung mit 2 Freiheitsgraden 734, 746, Horizontalschwingung 746 f., Vertikalschwingung 749 f., beliebige Schwingungsebene 751, Einflufs der Reibung und des Gehänges 751, 752.
Fourierentwicklung, Fourierkoeffizienten 650.

Galilei'sches Trägheitsgesetz 74.
Galton'sche Gesetze (für Reibung) 540.
Gaufs'sche Methode (für Säkularstörungen), Anwendung auf Präcession 636 f., Ausdehnung auf den gestörten Körper 644, auf periodische Störungen 650.
Gekoppelte Schwingungen 613, 800; Geschwindigkeitskoppelung 801.
Generalisierte Koordinaten 78, 91, Impulskomponenten für diese 78, 79, zu den Eulerschen unsymmetrischen Winkeln 107, 109, Deutung mechanischer Probleme im n dimensionalen Raume 509; s. auch Lagrange'sche Gleichungen.
Geodätische Bahnen 348.
Geradlaufapparat, s. Torpedo.
Geschwindigkeitskoordinaten, als Ableitung der lebendigen Kraft nach Impulskoordinaten 76.
Gilbert'sches Barygyroskop 753 f.
Gleichgewichtsaufgaben, statisch unbestimmte 548.
Gleichgewichtsfiguren (ellipsoidische), einer schweren rotierenden Flüssigkeitskugel 689, einer elastischen Kugel 692, einer schweren elastischen Kugel 696, eines spannungsfrei rotierenden schweren elastischen Ellipsoids nach Aufhören der Rotation 698.
Gleichmäfsiges Extremum 359.
Grenzkreise der Bahnkurven beim symmetrischen Kreisel, Gleichung dritter Ordnung für diese 239 f., Fall der reg. Präcession 251; qualitativ 200.
Gyroskop, Foucault'sches 2, 736, Barogyroskop 753.
Gyroskopischer(künstlicher)Horizont 919.
Gyroskopische Glieder 367, 771, 801, ihre konservative Natur 809.
Gyrostat 771.

Hauptträgheitsaxen 100, permanente Drehung beim kräftefreien Kreisel 128.
Hauptträgheitsmomente, Beschränkungen für diese 100.
Herpolhodie 13, Ausdruck durch α, β, γ, δ 44; beim kräftefreien Kreisel, eben 124, beim symmetrische Kreisel, sphärisch 235, Berechnung durch elliptische Funktionen beim symm. Kreisel 437, bei Poinsotbewegung 474, 482.
Hefs'scher Fall (beim schweren unsymmetrischen Kreisel) 379 f., Vergleich mit Pendel 382, Integration 383 f.
Horizont, gyroskopischer 919.
Howelltorpedo, s. Torpedo.
Hyperelliptische Integrale 518, näherungsweise Umkehr im Reellen 520 f.

Ikosaëder 30.
Impulsvektor 72 f; Impulsschraube beim starren Körper 93 761; Impulskomponenten für generalisierte Koordinaten 77, 78 f., für Rotation 95, 107, 109; kinetische Impulsgesetze (Newton'sche Gesetze) 74, 77, 110 f., 762, Euler'sche Gleichungen als Ausdruck für Impulsgesetze 142; Impulskonstanten beim symmetrischen Kreisel 200, beim unsymmetrischen 375; Impulskurve 123, 130, beim symmetrischen Kreisel 216, 217, in elliptischen Funktionen 438; verschiedene Kreisel mit gleicher Impulskurve 232.
Inneres (skalares) Produkt 61.
Integrable Fälle der Bewegung des unsymmetrischen Kreisels, s. diesen.
Inverse Orthogonaltransformation 30, 31.

Jacobi'sche Funktionen 418, Jacobi'sche Formeln bei Poinsotbewegung 472, Jacobi'sches Theorem über konjugierte Bewegungen 488.

Kinematik 7.
Kinematische Euler'sche Gleichungen, s. Eulersche.
Kinetik 7, 69f.
Kleine Schwingungen 364, Stabilitätskriterium hieraus abgeleitet, Kritik 371f.; um die aufrechte Kreiselbewegung, Fehlerabschätzung 327f., 365.
Knotenlinie 17, astronomische Bedeutung 634, 643.
Komplexe Ebene 393.
Konforme Abbildung 408.
Kompaſs, s. Kreiselkompaſs.
Konische Pendelung 932, s. Ballistik.
Konjugierte Poinsotbewegungen 476 f., Konstanten der konjugierten Bewegung 478, Relativbewegung der konjugierten Bewegungen 484, Identität mit Bewegung des schweren Kugelkreisels (Jacobi'scher Satz) 485, binärer Beweis (durch α, β, γ, δ) 486, Jacobi's Beweis 488.
Konservative Störung 347.
Konservatives System 809.
Kontragredientes Verhalten der Kraft- und Geschwindigkeitskoordinaten bei Transformation 79, 93.
Koordinaten des Kreisels, unabhängige, s. Orthogonaltransformation und Parameter.
Kowalevski'scher Fall der Kreiselbewegung 376.
Kraftbegriff 69, Kraft als Vektor 71, Zusammensetzung der Kräfte 81, Ableitung durch Addition der Arbeiten 89.
Kräftefreier symmetrischer Kreisel, seine allgemeine Bewegung reguläre Präcession 125, Bedingung für aufrechte Präcessionsaxe 153; Einfluſs des Luftwiderstands, Unterscheidung $A \gtrless C$ 588, 590.
Kräftefreier unsymmetrischer Kreisel, s. Poinsotbewegung.
Kräftepaar 82.
Kraftschraube 85.
Kreisel, Definition 1.
Kreiselkompaſs von Anschütz, allgemeine Theorie 847f., Kreiselwirkungen 854, Schwingungsgleichung, effektive Trägheit und Richtkraft 855f.; Einfluſs von Schiffsbewegungen und -beschleunigungen 851f., 858, Schwingungsdauer 853, 857, Ausführung, Dämpfung 861.
Kreiselspitze 198.
Kreiselwirkung (Deviationswiderstand) 173, 311, 763, bei schiefen Axen 764, strenger Ausdruck 764, ihre Richtung s. Parallelismus, Ableitung aus Lagrange'schen Gleichungen 770; Schema der Stabilierung durch K. 768; K. bei speziellen Systemen, s. diese.
Kritische Umlaufszahl der Lavalwelle 895, 898, als Resonanzphänomen 889, 899.
Kugelfunktionen 692.
Kugelkreisel, kinetische Analogie zum Massenpunkt 134, reziproke Bewegung wieder Kreiselbewegung 236; K. als Repräsentant für beliebigen symmetrischen Kreisel 234, Integration beim schweren K. 238.

Lagrange-Dirichlet'sches Stabilitätskriterium 355.
Lagrange'sche Gleichungen erster Art 157; zweiter Art 81, für den symm. Kreisel 156, 220; gemischter Art 158, in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 493, in A, B, C, D 494, 508, Analogie zum 4-dimensionalen Pendel 495f., s. auch generalisierte Koordinaten; Kreiselwirkung aus L. Gl. abgeleitet 770.
Lamé'sche Gleichungen, Integration durch ell. Funkt. zweiter Art 501f., α, β, γ, δ als kanonische Lösungen Lamé-scher Gleichungen 499, 508.
Langsame Bewegungen (Methode der quasistationären Bewegungen) 594.
Lavalturbine 884, Lavalwelle 885, Selbsteinstellung und kritische Umlaufszahl 886f., 897f., als Resonanzphänomen 889, 899; Kreiselwirkungen bei der freischwebenden Welle 893.
Lebendige Kraft = Arbeit des Impulses 76, 95, Geschwindigkeitskomponenten und Impulskomponenten als ihre partiellen Ableitungen 76, 78f.
Luftschiffe, störende Kreiselwirkungen, Stabilierung 921.
Luftwiderstand, Einfluſs auf den kräftefreien Kreisel 588, 590, auf schweren symm. Kreisel 592f.; Newton'sches Reibungsgesetz 925, L. bei bewegten Körpern als Summe der Einzeldrucke 929, s. Ballistik.

Mac Laurin'sches Ellipsoid 689, Clairaut'sche Formel 691.
Massentransporte, s. Polschwankungen.
Maxwell'scher Kreisel 14.
Metacentrische Höhe 798.
Minimalkegel, Parameterdarstellung 23, Transformation in sich 24.
Momentane Geschwindigkeitsänderung (Impuls) 72.
Mondanziehung, ihr säkulares Moment auf das Erdsphäroid 640, 656, Beitrag zur Erdpräcession 642.
Mondknotenbewegung, durch Sonnenanziehung 643f., Umlaufszeit 645, Einfluſs der Erdanziehung 646f., periodischer Einfluſs auf Erdbewegung (Nutation) 654f., 659.
Mondmasse, Bestimmung aus der Präcessionsdauer der Erde 663.

Newton's lex prima 74, lex secunda 74, 762.
Nicht holonome Systeme 867, 906.
Numerische Berechnung 259, elliptischer Integrale 260f., elliptischer Funktionen 440f.
Numerische Excentrizität 600.
Nutation (astronomische = erzwungene der Erde) 649f., ihre Entstehung durch Mondknotenbewegung 654, 659f., ihre Verwertung zur Bestimmung der Elliptizität der Erde 663.
Nutation, freie, s. pseudoreguläre Präcession, Polschwankungen.

Orthogonale Transformation 16, unabhängige Parameter (Euler'sche unsymmetrische Winkel) 17, durch lineare Transformation einer komplexen Variabeln dargestellt 23f., Binärparameter α, β, γ, δ 21, 38, Quaternionenparameter A, B, C, D 21, 38, orth. Transf. durch Quaternionenmultiplikation dargestellt 63f.; inverse Orthogonaltransformation 30, 31, s. Parameter, Quaternionen.

Parallelismus der Drehaxen, Tendenz zum gleichsinnigen 733, 763; Richtung des Deviationswiderstandes 173.
Parameter α, β, γ, δ der Drehung 21f., ihre projektive Bedeutung 24f., 28, funktionentheoretische Bedeutung 29, Bestimmung der Drehaxe 33f., Polhodie 43, Herpolhodie 44, Euler'sche kinematische Gleichungen 43, 151; symmetrischer Kreisel: elliptische Normalintegrale dritter Gattung für lg α . . . 231, 403, 405; P. als elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades 415, 420f., 426, 428, Lagrange-sche Gleichungen für α, β, γ, δ 493, 499f., 508, s. diese; Poinsotbewegung: P. als ϑ-Quotienten 463, 464, 468.
Pendel 202, sphärisches 209, Heſs'scher Fall als Erweiterung 382f., im vierdimensionalen Raum, Analogie zum Kugelkreisel 494f.
Periodizität 224f., 517, s. auch elliptische Funktionen.
Periodische Störungen 306, Ausdehnung der Gauſs'schen Methode 650.
Permanente Rotation, des kräftefreien Kreisels 128, 129, 132, des schweren symmetrischen Kreisels um die Vertikale 316f., Stabilitätsverhältnisse bei starkem und schwachem Kreisel 318f., 325, als asymptotische Bewegung 334f., 336, kleine Schwingungen 327f., 365f.; des schweren unsymmetrischen Kreisels (Staude'sche Drehung) 387f.
Poinsotbewegung (kräftefreier Kreisel), kinematische Darstellung 121, Impulskurve, Polhodie 124, 130f., Herpolhodie ebene Kurve 124, permanente Rotation 128f., Integration der Euler'schen Gleichungen 149, 455f., α, β, γ, δ als ϑ-Quotienten 461f., 464, 468, transszendente Konstanten 458, 462, 466, Bahnkurven der Hauptaxen 469, Jacobi'sche Formeln (für Richtungskosinus) 470f., 472, Herpolhodie 474, 482; konjugierte Poinsotbewegung, s. diese.
Poinsot'sche Konstruktion des Impulsvektors 101f., beim symmetrischen Kreisel 106.
Polhodie 13, aus den α, β, γ, δ berechnet 43, bei Poinsotbewegung 124; ebene Kurve beim symmetrischen Kreissl 217; durch elliptische Funktionen dargestellt 436.
Polschwankungen, Beobachtungen 673, 678, 682, als freie Nutationen 599, 664, 665, 667, Euler'sche Periode 668, Chandler'sche Periode, Erklärung durch Elastizität der Erde 688f., 700, Deformation der Erdoberfläche 704; erzwungene P. von jährlicher Periode

189, 707, 709, 711, 716; cyklische Massentransporte 715, meteorologische Massentransporte 714, 722, dämpfende Wirkung der Flutreibung 725f., 727; räumliche Bewegung der Rotationsaxe 667.
Populäre Kreiselliteratur 307f.
Potentielle Energie 117.
Präcession, astronomische (der Erde), kinematisch 50, 634; kinetisch, Anwendung der Gaufs'schen Methode für Säkularstörungen 636f., Anziehungspotential des Erdsphäroids 637, säkulares Moment von Sonne und Mond auf die Erde 640, 656, Verhältnis beider 642, Präcessionsgeschwindigkeit 641, Bestimmung der Elliptizität der Erde und der Mondmasse 663; Rückgang der Mondknoten als Präcession 643f., 646f.
Präcession, pseudoreguläre 209, Beobachtung 291, qualitative Erklärung 294f.; analytische Näherungsdarstellung 276, 283f., 300f., Präcessionsgeschwindigkeit 287, 302, Charakter der Nutationen 276, 287, 305, bei kleinem Präcessionskreis 338f., 341; des Spielkreisels 519f., 526; bei elastischer Unterlage 613; konische Pendelung rotierender Langgeschosse 932.
Präcession, reguläre, Kinematik derselben 47, progressive und retrograde 48, weitere Unterteilung 52, 53, gleichförmig beschleunigte Präcession, als oskulierende beliebiger Bewegungen 54, 55, 171; reguläre Präcession als allgemeine Bewegung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels 125, 153, 604, Einflufs der Elastizität 605f.; beim schweren symmetrischen Kreisel: Deviationswiderstand 175, Bedingungsgleichung 177, 252, 279, langsame und schnelle 178, Stabilität 288f., als singuläre Lösung 281.
Praktische Stabilität 325.
Prinzip der virtuellen Verrückungen 91, von D'Alembert 167.
Pseudoreguläre Präcession, s. Präcession.
Punktmechanik, ihre Verwendung in der Kreiseltheorie 315, im mehrdimensionalen Raum 509.

Qualitative Methoden der Mechanik 375f.; qualitative Diskussionen beim symmetrischen Kreisel 197f., 248f., 294f., der Reibungseinflüsse 560f., 619f.
Quantität der Bewegung (Impuls) 74, 762.
Quaternion 21, als Drehstreckung 56, komplexe Darstellung, Tensor, vektorieller und skalarer Teil 58, Vektoren als Wendestreckungen 59; Zusammensetzung 57, = Multiplikation 60, orthogonale Transformation durch Multiplikation von Quaternionen 62f., Bedeutung der Quaternionentheorie 65f., Hamilton'sche Bezeichnungen 58, 66, s. auch Lagrange'sche Gleichungen.

Raddampfer, Rolle der Kreiselwirkungen 914.
Reaktionskraft des Unterstützungspunktes 86, 549.
Reguläre Präcession, s. Präcession.
Reibung 532f., fester Körper, Coulombsche Reibungsgesetze 537, Reibungskoeffizienten 538, rollende R. 543, bohrende R. 545; experimentelle Untersuchungen, Galton'sche Gesetze 538, 540; Reibungsarbeit bei komponierten Bewegungen 576, beim Kreisel 547f., 583; Aufrichten der Figurenaxe 553f., analytisch 558f.; bohrende R. beim Kreisel 556; R. beim Spielkreisel 619f., 628, 630, Einflufs der Kreiselspitze 632, bei den Foucault'schen Versuchen 743f., 751f.; Flüssigkeitsreibung 535, Schmiermittelreibung 546, Newtonscher Reibungswiderstand der Luft 925, s. auch Luftwiderstand, Ballistik.
Relativbewegung (zur Erde) 184, 737f. 847f.
Riemann'sche Fläche 394f., 457.
Rotationsaxe, Rotationsvektor 11, 13, durch A, B, C, D und α, β, γ, δ bestimmt 33f., Nebenaxen 33.
Rotationskomponenten, Euler's symmetrische 46, 60, als nicht holonome R. 46, 159; Euler's unsymmetrische als holonome R. 46; Zusammenhang mit Impulskomponenten 95, 98, 101; s. auch orthogonale Transformation.
Rotationssymmetrie, geometrische und mechanische 105.

Säkulare Bewegung 306, Säkularstörung, Gaufs'sche Methode 634, säkulares Moment von Sonne und Mond auf die Erde 640, 656.

Schiffskreisel (Schlick'scher) 795; freie Schwingungen, Koppelung durch Kreiselwirkungen 799f., Haupt- und Nebenschwingung 801f., Dissipationsfunktion 801; nähere Diskussion 817f., günstiges Mafs für Kreiselimpuls, Bremse und Frequenzverhältnis 824, 826, 831, 835; Einflufs auf erzwungene Schwingungen 805f., 811f.; Versuchsergebnisse 837, 839, Koppelung mit Stampfschwingungen, Skutsch'scher Doppelkreisel 842f., Materialbeanspruchung 844; Bessemerkreisel 794.
Schleifen der Bahnkurven 212, 257, 258.
Schmiermittelreibung 546.
Schrauben, Bewegungsschraube 9, 47, Kraftschraube 85, Stofsschraube 88, Moment zweier Schrauben aufeinander 103.
Schwacher Kreisel, im Gegensatz zum starken 249, 257. Bedingung für Präcession 251, Labilität der aufrechten Bewegung 321f., asymptotische Bahn 334f.
Schwebebahn, Rolle von Kreiselwirkungen 901.
Schwerpunktssatz 112, s. auch Impulssätze.
Seitenabweichung rotierender Langgeschosse 933, 934.
Skalares Produkt (inneres Produkt) 61.
Spielkreisel (auf der Horizontalebene spielend) 512f., Integration 512f., Periodizität 518, näherungsweise Umkehr der hyperelliptischen Integrale 520f.; pseudoreguläre Präcession 519f., 526; S. mit Reibung 619, Aufzeichnung der Bahn 620f., Schwerpunktsbewegung 627, Aufrichten oder Senken der Figurenaxe 628f., 630.
Spitzen in den Bahnkurven 205f., 247, 255.
Stabilierung labiler Systeme durch Kreiselwirkungen 135, 196, 767f., aufrechte Bewegung des symmetrischen Kreisels 318f., 371f., Thomson'scher Satz 771, 906; Torpedo-Geradlaufapparat 786f., Fahrrad 865f., 879f., Einschienenwagen 905, an Kurven 912; S. der Langgeschosse 931f.
Stabilität, Definitionen 343f., 350; theoretische und praktische 325, Routh-sches Energiekriterium 358, für cyklische Bewegungen 361f., Kriterium aus kleinen Schwingungen 371f.; Stabilitätsverhältnisse der permanenten Drehung 129, 318f., 371f., der regulären Präcession 288f., Einflufs des Luftwiderstandes 592; s. auch Stabilierung.
Stabilitätsgrade 325, 353.
Starker Kreisel 249, Spitzenkurven 257, Stabilität der aufrechten Bewegung 321f.,
Statik des starren Körpers 81f.
Staude'sche Drehungen 387f., Staude-scher Kegel 388, s. auch permanente Rotation.
Stereographische Projektion 29, 199.
Störungstheorie 649, Entwicklung der Störungsfunktion 650, s. auch Säkularstörung.
Stofskraft 70, Stofschraube 88.
Symmetrische Drehungsparameter (von Euler) 60.
Symmetrischer Kreisel 1, 104, Modell 105, Bahnkurven 197f., Integration 216f., Ersatz durch Kugelkreisel 234, Darstellung durch elliptische Funktionen 414f., Jacobi'scher Satz 485, s. Bahnkurven, elliptische Funktionen, Präcession, Stabilität usw.

Theoretische Stabilität 325.
Thetafunktion 418, Thetaquotienten (ell. F. erster und zweiter Art) 421f., numerische Berechnung der ϑ-Reihen 441f., Konvergenz 444f., praktische Bedeutung 454; Transformation 442, s. auch elliptische Funktionen.
Thomson'scher Satz über Stabilierung durch gyroskopische Glieder 771, 906.
Torpedo, Howell- 791, Stabilierung 793, Kritik 793f.; Whitehead- 782f., Geradlaufapparat 784, Torpedokreisel 785, Theorie der Stabilierung 786f., 790.
Trägheitsellipsoid 99, beim symmetrischen Kreisel 104, weitere Unterteilung 104.
Trägheitsgesetz (Newton's lex prima) 74.
Trägheitsmomente, Trägheitsprodukte 98.
Trägheitswiderstand 163, 165, 169, s. auch Deviationswiderstand.
Transformationstheorie der elliptischen Funktionen 47, der ϑ-Funktionen 442.
Transformationsgruppen 161.

Transscendente Konstanten beim symmetrischen Kreisel 428, bei Poinsotbewegung 466.
Turbinendampfer, Lagerbeanspruchung durch Kreiselwirkungen 917.

Unendlich kleine Drehungen 39, Quaternionenformeln 40, Zusammensetzung 42.
Uniformisierung durch elliptische Funktionen 414.
Unsymmetrischer Kreisel, Integrale 375; integrable Fälle 376f.: Kowalevski'scher Fall 376, Heſs'scher Fall 378f., Staude'scher Fall 387; bei allgemeinem Kraftgesetz 377.
Untergruppe 161, s. Euler'sche Gleichungen.

Vektorielles Produkt (äuſseres Produkt) 61, 139, = Zusammensetzung von Wendestreckungen 61.
Vektorrechnung 55.
Verzweigungspunkte, Verzweigungslinien (auf Riemann'schen Flächen) 395.

Wellenwiderstand (als Bestandteil des Luftwiderstandes) 925, bei bewegtem Elektron 926.
Wendestreckung 59.
Whitehead-Torpedo, s. Torpedo.
Wiechert'sche Theorie des Erdinnern 703.

Zeeman-Effekt 809.
Zusammensetzung von Kräften am starren Körper 84, durch Addition von Arbeiten abgeleitet 89; Z. von Drehungen (und Drehstreckungen) für Parameter α, β, γ, δ 32, A, B, C, D 33, 57, durch Quaternionenmultiplikation 60; Z. von Wendestreckungen = Vektorprodukt 61.

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. 2 Teile in 4 Bänden. Mit vielen Figuren. gr. 8. Geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra.
1. Band: Arithmetik. Von C. Färber. [Erscheint im Sommer 1910.]
2. — Algebra. Von E. Netto. [In Vorbereitung.]

II. — Die Grundlehren der Geometrie.
1. Band: Die Elemente der Geometrie. Von H. Thieme. Mit 323 Figuren. [XII u. 394 S.] 1909. n. *M.* 9.—
2. — Von W. Frz. Meyer. [In Vorbereitung.]

Die „Grundlehren der Mathematik" sind als ein dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechendes Gegenstück zu R. Baltzers „Elementen der Mathematik" gedacht. Sie bilden kein Handbuch, in dem aller irgendwie wissenswerte Stoff aufgespeichert wurde, sondern sie sind in erster Linie dem Unterricht, und zwar auch dem Selbstunterricht gewidmet. Tieferen Fragen suchen sie durch gelegentliche Ausblicke gerecht zu werden. Nicht minder soll auch den historischen Interessen Rechnung getragen werden durch die Angabe der wichtigsten Momente in der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Theorien.

Speziell wird der zweite Teil in freier Darstellung den Grundlagen, Grundzügen und Grundmethoden der Geometrie gewidmet sein. Im ersten Bande (Verfasser H. Thieme) erhalten die „Elemente", einschließlich der analytischen Geometrie der Ebene, gerade durch das sorgfältige Eingehen auf das Axiomatische ihre charakteristische Färbung, ohne daß die praktischen Forderungen des Lehrstoffes vernachlässigt würden. Der zweite Band (Verfasser W. Fr. Meyer) wird unter Heranziehung der Hilfsmittel der modernen Algebra (und auch Funktionentheorie) die Geometrie der „Transformationen" behandeln, wobei mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum eine beschränkte Auswahl von selbst geboten ist.

Henneberg, Geheimer Hofrat Dr. **L.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der graphischen Statik. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Heun, Dr. **K.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Mit 18 Figuren. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IX, 2. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. *M.* 4.—

——— und **R. v. Mises,** Assistent an der k. k. Technischen Hochschule zu Brünn, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Höfler, Dr. **A.,** Professor an der Universität Wien, Didaktik des mathematischen Unterrichts. A. u. d. T.: Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen. Herausgegeben von A. Höfler und F. Poske. Band I. Mit 2 Tafeln und 147 Figuren. [XVIII u. 509 S.] gr. 8. 1910. Geb. n. *M.* 12.—

Killing, Geheimer Regierungsrat Dr. **W.,** Professor an der Universität Münster i. W., und Dr. **H. Hovestadt,** Professor am Realgymnasium zu Münster i. W., Handbuch des mathematischen Unterrichts. 2 Bände. I. Band. Mit 32 Figuren. [VIII u. 456 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. n. *M.* 10.—. [Bd. II erscheint im Herbst 1910.]

Das Werk will einem doppelten Zweck dienen: der Vermittlung zwischen Wissenschaft und Unterricht sowie der Auswahl passender methodischer Lehrgänge. Die Verfasser sind der Ansicht, daß der Unterricht leide, wenn seine Beziehungen zur Wissenschaft sich lockern. Dagegen liefert eine genaue Kenntnis der Grundlagen der elementaren Mathematik wesentliche Gesichtspunkte für den Unterricht. Außerdem will das Buch zum Nachdenken über den Unterricht anregen. Es wägt die Vorteile und Mängel verschiedener Methoden gegeneinander ab, damit der Lehrer mit klarer Erkenntnis auswähle, was seiner Persönlichkeit und dem Standpunkt der Schüler am besten entspricht.

Kirchhoff, Dr. **Gustav,** weiland Professor der Physik an der Universität Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. 4 Bände. Mit Figuren. gr. 8. Geh. n. *M.* 39.—, in Leinwand geb. n. *M.* 47.—

Einzeln:

I. Band. Mechanik. 4. Auflage von Dr. W. Wien, Professor an der Universität Würzburg. [X u. 464 S.] 1897. Geh. n. *M.* 13.—, in Leinwand geb. n. *M.* 15.—

II. — Optik. Herausgegeben von Dr. Kurt Hensel, Professor an der Universität Marburg. Mit dem Bildnis Kirchhoffs. [VIII u. 272 S.] 1891. Geh. n. *M.* 10.—, in Leinwand geb. n. *M.* 12.—

III. Band. Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor an der Universität Berlin. [X u. 228 S.] 1891. Geh. n. *M.* 8.—, in Leinwand geb. n. *M.* 10.—

IV. — Theorie der Wärme. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor an der Universität Berlin. [X u. 210 S.] 1894. Geh. n. *M.* 8.—, in Leinwand geb. n. *M.* 10.—

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.,** Professor an der Universität Göttingen, autographierte Vorlesungshefte. 4. Geh.

Höhere Geometrie. Ausgearbeitet von Fr. Schilling. Unveränderter Abdruck 1907.
Heft 1 [VI u. 566 S.] (W.-S. 1892/93) } zusammen n. *M* 15.—
Heft 2 [IV u. 388 S.] (S.-S 1893)

Nichteuklidische Geometrie.
Heft 1 [364 S.] (W.-S. 1889/90) } zusammen n. *M* 14.—
— 2 [238 S.] (S.-S. 1890)

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Ausgearbeitet von Conrad Müller. (S.-S. 1901.) Neuer Abdruck 1907. [VIII u. 484 S.] n. *M* 10.—

——— u. **E. Riecke,** über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. Vorträge, gehalten in Göttingen Ostern 1900 bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Gesammelt von F. Klein und E. Riecke. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. Mit 84 Figuren im Text. [VI u. 252 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. *M* 6.—

Kohlrausch, weil. Dr. **F.,** in Marburg, vorm. Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt zu Charlottenburg, Lehrbuch der praktischen Physik. 11., stark verm. Aufl. Mit 400 Figuren. [XXXII u. 736 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. n. *M* 11.—

——— Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2., verm. Aufl. (6.—10. Tausend.) Mit zahlreichen Figuren. [XVIII u. 268 S.] gr. 8. 1907. Geb. n. *M* 4.—

Koenigsberger, Geheimer Rat Dr. **Leo,** Professor an der Universität Heidelberg, Hermann von Helmholtz' Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Mit einem Bildnis H. v. Helmholtz' nach einer Ölskizze von F. v. Lenbach. [V u. 58 S.] gr. 8. 1896. Geh. n. *M* 2.40.

——— die Prinzipien der Mechanik. Mathematische Untersuchungen. [XII u. 228 S.] gr. 8. 1901. Geb. n. *M* 9.—

Lamb, H., F. R. S., Professor an der Viktoria-Universität Manchester, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche autorisierte Ausgabe, nach der 3. englischen Auflage besorgt von Joh. Friedel. Mit 79 Figuren. [XIV u. 788 S.] gr. 8. 1907. Geb. n. *M* 20.—

Lanchester, F. W., in Birmingham, Aërodynamik. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Deutsch von C. und A. Runge in Göttingen. In 2 Bänden. gr. 8.

I. Band: Mit Anhängen über die Geschwindigkeit und den Impuls von Schallwellen, über die Theorie des Segelfluges usw. Mit 162 Figuren und 1 Tafel. [XIV u. 360 S.] 1909. n. *M* 12.—

II. — Spezielle Probleme der Flugtechnik. (In Vorbereitung.)

Lorenz, Dr. **H.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig, Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen. Mit 66 Figuren. [V u. 156 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. *M* 5.—

Love, A. E. H., M. A. D. Sc. F. R. S., Professor an der Universität Oxford, Lehrbuch der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von A. Timpe, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Aachen. Mit 75 Abbildungen. [XVI u. 664 S.] gr. 8. 1907. Geb. n. *M* 16.—

Marcolongo, Dr. **R.,** Professor an der Universität Neapel, rationelle Mechanik. Deutsch von Dr. K. Boehm, Professor an der Universität Heidelberg. 2 Bände. gr. 8. Geb. [Unter der Presse.]

Pringsheim, Dr. E., Professor an der Universität Breslau, Vorlesungen über die Physik der Sonne. Mit 235 Abbildungen und 7 Tafeln. [VIII u. 435 S.] gr. 8. 1910. Geh. n. *M.* 16.—. In Leinwand geb. n. *M.* 18.—

Routh, Edward John, Sc. D., LL. D., F. R. S., usw., weiland Professor an der Universität Cambridge, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In 2 Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von F. Klein, gr. 8. 1898. In Leinwand geb. n. *M.* 24.—

I. Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren. [XII u. 472 S.] n. *M.* 10.—
II. — Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren. [XII u. 544 S.] n. *M.* 14.—

Schell, Dr. W., weiland Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik mit besonderer Rücksicht auf das Bedürfnis technischer Hochschulen. Mit vielen Holzschnitten. 2., umgearbeitete Auflage. 2 Bände. gr. 8. Geh. n. *M.* 20.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 24.—

Einzeln:

I. Band: 1. Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen. 2. Geometrie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände (Kinematik). [XVI u. 580 S.] 1879. Geh. n. *M.* 10.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 12.—
II. — 3. Theorie der Kräfte und ihrer Äquivalenz (Dynamik im weiteren Sinne, einschließlich Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne). [XII u. 618 S.] 1880. Geh. n. *M.* 10.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 12.—

Schlink, Dr. W., Dipl.-Ing., Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, Statik der Raumfachwerke. Mit 214 Abbildungen und 2 Tafeln. [XIV u. 390 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 9.—

Schoenflies, Dr. A., Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Mit Figuren. [VI u. 951 S.] gr. 8. 1886. Geh. n. *M.* 4.—

Schwering, Prof. Dr. K., Direktor des Gymnasiums an der Apostelkirche zu Cöln a. Rh., Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Mit 139 Figuren. [VIII u. 408 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 8.—

Stephan, Regierungsbaumeister P., Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Dortmund, die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. 2 Teile. gr. 8.

I. Teil. Mechanik starrer Körper. Mit 255 Figuren. [VIII u. 344 S.] 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 7.—
II. — Festigkeitslehre und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Mit 200 Figuren. [VIII u. 332 S.] 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 7.—

Study, E., Professor an der Universität Bonn, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit 46 Figuren und 1 Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. Geh. n. *M.* 21.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 23.—

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. I. Jahrgang 1909/10. Unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausg. von Felix Auerbach. Mit 1 Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S.] 8. 1909. In Leinwand geb. n. *M.* 6.—

——— II. Jahrgang. 1911. Unter Mitwirkung von D. Hilbert, H. Greinacher, G. Hessenberg, O. Knopf, H. Liebmann, W. Lietzmann, H. Reissner, K. Simons, O. Töplitz, W. Wien und R. Ziegel herausg. von F. Auerbach und R. Rothe. Mit einem Bildnis H. Minkowskis. [ca. 500 S.] 8. In Leinwand geb. ca. n. *M.* 6.—. [Erscheint im Dezember 1910.]

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Subdirektor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaeß, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von F. Klein und 184 Figuren. [XII u. 364 S.] gr. 8. 1909 Geh. n. ℳ 7.—, in Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Tesar, L., Professor an der k. k. Staatsrealschule im XX. Bezirk zu Wien, die Mechanik. Eine Einführung mit einem metaphysischen Nachwort. Mit 111 Figuren. [XIV u. 220 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 3.20, in Leinwand geb. n. ℳ 4.—

Timerding, Dr. H. E., Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig, Geometrie der Kräfte. Mit 27 Figuren. [XII u. 381 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Trabert, Dr. W., Professor an der Universität Wien, Lehrbuch der kosmischen Physik. gr. 8. Geb. [Erscheint Ende 1910.]

Voigt, Geheimer Regierungsrat Dr. **W.,** Professor an der Universität Göttingen, Magneto- und Elektrooptik. Mit 75 Figuren. [XIV u. 396 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

——— Kristall-Physik. (Mit Ausnahme der Kristall-Optik.) gr. 8. 1910. In Leinwand geb. [Unter der Presse.]

Volkmann Dr. P., Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.20.

Webster, A. G., Ph. D., Professor of Physics, Clark University, Worcester, the Dynamics of Particles, and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 588 S.] gr. 8 1904. Geb. n. ℳ 14.—

——— Lehrbuch der Dynamik, als Einführung in die theoretische Physik. In 2 Teilen. Deutsche Ausgabe von C. H. Müller. Mit zahlreichen Figuren. gr. 8.

I. Teil: Dynamik des Punktes und des starren Körpers. [Erscheint Ostern 1911.]

II. „ Potentialtheorie und Dynamik der deformierbaren Körper. [Erscheint im Herbst 1911.]

Wüllner, Geh. Regierungsrat Dr. **A.,** weil. Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. Mit 1104 Abbildungen und Figuren und 4 lithographierten Tafeln. gr. 8. 1895—1907.

Bei gleichzeitigem Bezuge aller 4 Bände ermäßigt sich der Gesamtpreis des Werkes geh. auf n. M. 32.—, in Halbfranz geb. auf n. M. 40.—

Einzeln:

I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. 6. Auflage bearbeitet von A. Wüllner und A. Hagenbach. Mit 333 Abbildungen und Figuren. [XIV u. 1058 S.] 1907. Geh. n. ℳ 16.—, in Halbfranzbd. n. ℳ 18.—

II. — Die Lehre von der Wärme. 5. Auflage. Mit 131 Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] 1896. Geh. n. ℳ 12.—, in Halbfranzband n. ℳ 14.—

III. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. 5. Auflage. Mit 341 Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] 1897. Geh. n. ℳ 18.—, in Halbfranzband n. ℳ 20.—

IV. — Die Lehre von der Strahlung. 5. Auflage. Mit 299 Abbildungen und Figuren und 4 lithographischen Tafeln. [XII u. 1042 S.] 1899. Geh. n. ℳ 14.—, in Halbfranzband n. ℳ 16.—